N° d'ordre : 389

THÈSE

PRÉSENTÉE A

L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX I

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Georges LACROIX

MAÎTRE-ASSISTANT A L'E. N. S. E. R. B.

Contribution à l'étude de la chronométrie électronique.

Etude du comptage apériodique à faible temps de résolution et optimalisation des moyens mis en œuvre.

Soutenue le 10 novembre 1973, devant la Commission d'Examen :

MM. F. VALENTIN, Professeur ..... *Président*

P. GRIVET, Membre de l'Académie des Sciences, Professeur à l'Université de Paris XI .....

M.-Y. BERNARD, Professeur au Conservatoire National des Arts et Métiers .....

F.-H. RAYMOND, Maître de Conférences au Conservatoire National des Arts et Métiers, Directeur à la Société Thomson-C.S.F..... *Examinateurs*

J. MEY, Chef de la Division Instrumentation Nucléaire rapide. Centre d'Etudes Nucléaires de Grenoble .....

G. BOUSSEAU, Professeur .....

— 1973 —

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547309_0010

N° d'ordre : 389

THÈSE

PRÉSENTÉE A

L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX I

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Georges LACROIX

MAÎTRE-ASSISTANT A L'E. N. S. E. R. B.

Contribution à l'étude de la chronométrie électronique.

Etude du comptage apériodique à faible temps de résolution et optimalisation des moyens mis en œuvre.

Soutenue le 10 novembre 1973, devant la Commission d'Examen :

MM.	F. VALENTIN, Professeur	*Président*
	P. GRIVET, Membre de l'Académie des Sciences, Professeur à l'Université de Paris XI	*Examinateurs*
	M.-Y. BERNARD, Professeur au Conservatoire National des Arts et Métiers	
	F.-H. RAYMOND, Maître de Conférences au Conservatoire National des Arts et Métiers, Directeur à la Société Thomson-C.S.F.	
	J. MEY, Chef de la Division Instrumentation Nucléaire rapide. Centre d'Etudes Nucléaires de Grenoble	
	G. BOUSSEAU, Professeur	

— 1973 —

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

A Monsieur le Professeur F. VALENTIN

Directeur du Laboratoire d'Electronique Appliquée

Hommage respectueux et reconnaissant

Ce travail a été réalisé au Laboratoire d'Electronique Appliquée sous la direction de Monsieur le Professeur VALENTIN. Nous tenons à lui exprimer toute notre reconnaissance pour la confiance qu'il nous a toujours témoignée.

Nous tenons aussi à remercier tout particulièrement :

Monsieur le Professeur GRIVET, Membre de l'Académie des Sciences, Directeur de l'Institut d'Electronique Fondamentale de la Faculté des Sciences d'Orsay, qui nous a donné des conseils pour la rédaction de ce mémoire et qui nous a fait l'honneur d'accepter de venir juger notre travail.

Monsieur le Professeur BERNARD, qui a bien voulu faire partie de notre jury de thèse.

Monsieur RAYMOND, Maître de Conférences au Conservatoire National des Arts et Métiers, Directeur à la Société THOMSON C. S. F., pour sa participation à la commission d'examen.

Monsieur MEY, Chef de la Division Instrumentation Nucléaire Rapide au Centre d'Etudes Nucléaires de Grenoble, pour l'intérêt qu'il a bien voulu porter à notre travail en acceptant de le parrainer dans le cadre du Centre National de la Recherche Scientifique.

Monsieur le Professeur BOUSSEAU, Directeur de l'Ecole Nationale Supérieure d'Electronique et de Radioélectricité de Bordeaux, pour les remarques pertinentes dont il nous a fait part à l'examen de notre manuscrit de thèse.

Monsieur AUCOUTURIER, notre ami, qui a suivi ce travail avec beaucoup d'intérêt, nous apportant aide et encouragements chaque fois que nous étions en difficulté.

Monsieur MARCHEGAY, pour sa précieuse collaboration de tous les jours et l'amitié qu'il nous a témoignée.

Tous les chercheurs, techniciens et collaborateurs administratifs du Laboratoire qui nous ont apporté leur concours toujours efficace et dévoué.

Tous ceux qui ont participé à la réalisation matérielle de ce mémoire.

S O M M A I R E

			Page
		INTRODUCTION	1
CHAPITRE I		COMPTAGE APERIODIQUE A FAIBLE TEMPS DE RESOLUTION	
		PREMIERE PARTIE : Présentation des principaux types de compteurs électroniques rapides	
I-1		Structures des compteurs	5
	1-1	Principaux codes pour compteurs en numération non-binaire	
	1-2	Classification des compteurs	
	1-3	Pouvoir de résolution des compteurs	
I-2		Principaux circuits logiques	8
	2-1	Les mémoires	
	2-2	Technologie des circuits logiques à transistors	
I-3		Performances actuelles des compteurs	11
		DEUXIEME PARTIE : Utilisation de la diode tunnel pour le comptage rapide	
I-4		Circuits de commutation à diodes tunnel	13
	4-1	La diode tunnel	
	4-2	Montage bistable à diode tunnel	
	4-3	Circuits logiques à diodes tunnel	
	4-4	Circuits de comptage à diodes tunnel	
CHAPITRE II		COMPTEUR EN ANNEAU A DIODES TUNNEL	
II-1		Le compteur en anneau	37
II-2		Le compteur en anneau à diodes tunnel	38
	2-1	Fonctionnement d'un étage en régime statique	
	2-2	Fonctionnement d'un étage en régime dynamique	
II-3		Remise à zéro du compteur	42
	3-1	Incidence du circuit de remise à zéro sur les performances du compteur	
	3-2	Problème de la remise à zéro. Cahier des charges	
	3-3	Circuit de remise à zéro	
II-4		Cellule de base du compteur	47

CHAPITRE III OPTIMALISATION D'UN CIRCUIT ELECTRONIQUE - CONDITIONS DE FONCTIONNEMENT D'UN MONTAGE

III-1 Données du problème de l'optimalisation 52

1-1 Cahier des charges
1-2 Schéma du montage
1-3 Modèle mathématique
1-4 Grandeurs caractéristiques du montage - Conditions de fonctionnement
1-5 Paramètres du montage

III-2 Expression des grandeurs caractéristiques G_ℓ . 55

2-1 Influence de l'environnement
2-2 Incertitude sur les valeurs des paramètres z_i
2-3 Grandeur caractéristique G_ℓ

III-3 Conditions de fonctionnement 61

3-1 Expression des conditions de fonctionnement
3-2 Méthodes de résolution

CHAPITRE IV OPTIMALISATION DES CIRCUITS - METHODES CLASSIQUES

IV-1 Les méthodes déterministes 65

1-1 Classification des méthodes déterministes
1-2 Utilisation des méthodes du "cas le plus défavorable"

IV-2 Méthodes statistiques 70

2-1 Principales lois de probabilité - Rappels
2-2 Calcul direct de la distribution d'une fonction
2-3 Elaboration d'un histogramme ou détermination numérique de la distribution d'une fonction
2-4 Détermination de la fonction de distribution d'une grandeur à partir d'un histogramme - Méthodes d'ajustage à une loi connue.
2-5 Recherche d'une forme approchée de la distribution d'une fonction

IV-3 Conclusion 87

CHAPITRE V METHODE D'OPTIMALISATION PROPOSEE

V-1 Introduction 91

V-2 Données du problème 92

2-1 Notion d'optimalisation
2-2 Optimalisation simple
2-3 Influence de la dispersion sur les paramètres du montage

V-3 Procédés généraux d'optimalisation 98

3-1 Programmation linéaire
3-2 Programmation non-linéaire
3-3 Conclusion - Application à l'optimalisation de circuits électroniques

V-4 Optimalisation des circuits électroniques logiques 106

4-1 Problème particulier de l'optimalisation des circuits électroniques
4-2 Intéraction entre les contraintes - Notion de compromis
4-3 Optimalisation compte tenu de la notion de compromis
4-4 Résumé de la méthode d'optimalisation des circuits électroniques - Conclusion.

CHAPITRE VI RESOLUTION DE L'OPTIMALISATION

VI-1 Méthodes de résolution par approximations successives 118

1-1 Données du problème
1-2 Méthodes de résolution de la première catégorie
1-3 Processus basés sur une transformation préalable du système d'équations
1-4 Choix d'un processus de calcul

VI-2 Résolution d'un système d'équations linéaires . 129

2-1 Principales méthodes de résolution directe
2-2 Comparaison des différentes méthodes de résolution

VI-3 Mise en oeuvre de la méthode de Newton généralisée 136

3-1 Algorithme de résolution
3-2 Résolution du système linéaire - Algorithme du processus de triangularisation directe de la matrice des coefficients
3-3 Processus du calcul numérique

CHAPITRE VII OPTIMALISATION DE LA DECADE A DIODES TUNNEL

VII-1 Schéma de principe 143

VII-2 Paramètres du montage - Modèle mathématique . . 144

2-1 Les sources d'alimentation
2-2 Les résistances
2-3 Le générateur de commande
2-4 Les composants actifs

VII-3 Conditions de fonctionnement 153
VII-4 Equations aux limites - Coefficients de sécurité 155
VII-5 Choix des inconnues - Conditionnement du système d'équations 159
VII-6 Valeurs de départ des inconnues 160
VII-7 Résolution - Organigramme 160
VII-8 Résultats 162
VII-9 Optimalisation des données 165

CHAPITRE VIII REALISATION PRATIQUE DE LA DECADE

VIII-1 Choix des composants 167
1-1 Composants actifs
1-2 Composants passifs - Résistances
1-3 Alimentations
VIII-2 Réalisation 170
VIII-3 Résultats 171
VIII-4 Essais en température 173
VIII-5 Possibilités d'amélioration de la décade . . . 173
5-1 Prospective à court terme
5-2 Prospective à long terme
VIII-6 Conclusion 175

CHAPITRE IX PROBABILITE DE FONCTIONNEMENT DU MONTAGE

IX-1 Etude statistique du fonctionnement d'un circuit 177
IX-2 Probabilité de fonctionnement de la décade . . 180
IX-3 Résultats 181
IX-4 Conclusion 184

CONCLUSION 185

ANNEXE I SOUS PROGRAMME EQUA 189

ANNEXE II OPTIMALISATION DE LA DECADE A DIODES TUNNEL . . 191
Influence des paramètres du montage sur la plage de température

I N T R O D U C T I O N

Le comptage tend de plus en plus à devenir une fonction principale en électronique. Son essor coïncide avec l'avénement des circuits de logique séquentielle et, s'il fut initialement utilisé pour l'étude de phénomènes impulsionnels, son emploi s'est rapidement généralisé à de nombreux secteurs liés au traitement numérique de l'information et tout naturellement à la Métrologie.

L'une des applications les plus courantes du comptage réside dans les fonctions fréquencemètre et chronomètre, toutes deux complémentaires. Elle consiste à ne rendre un compteur actif que pendant un laps de temps donné, alors qu'on lui applique un signal périodique, ce qui permet de faire une comparaison directe entre une durée et la période d'une "horloge" ; du résultat de la mesure découle la valeur de l'une des grandeurs par rapport à l'autre. C'est précisément en vue de son utilisation dans le domaine de la chronométrie que nous avons orienté nos recherches vers le comptage rapide.

Nous avons pris conscience de l'importance de la mesure précise d'intervalles de temps lors de contacts avec l'Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales (O.N.E.R.A.) où l'on nous a fait part de certains problèmes dont la résolution est liée à la chronométrie "ultra-fine" : la télémétrie laser, la trajectographie à l'horloge, la comparaison d'horloges de très haute précision effectuée dans le cadre du transport de l'heure ou de l'étude de la stabilité des horloges atomiques ...

Il est certes, possible de réaliser des chronomètres de conceptions diverses, mais la structure classique basée sur l'utilisation d'un compteur présente de nombreux avantages dus au principe même de la mesure qui permet le cas échéant de comparer directement une durée à un étalon de temps.

L'association d'un compteur et d'une horloge réalise une quantification du temps à partir de laquelle on peut opérer une mesure d'intervalle de temps en introduisant dans le système soit une porte électronique soit un dispositif de lecture au vol de l'information. La précision de la mesure est alors directement liée, d'une part, à celle de l'horloge étalon, d'autre part, au temps de résolution du compteur et des circuits annexes. Elle peut être très grande en valeur relative, lorsque les intervalles de temps mesurés sont longs et elle est dans ce cas, largement supérieure à ce que l'on obtient avec des circuits de mesure analogiques ou des dispositifs de type vernier. Un compteur de temps de résolution 1 ns, par exemple, permet d'obtenir une précision relative de l'ordre de 10^{-9} dans la mesure d'un intervalle de temps de 1 s, à condition bien sûr que l'horloge et les circuits annexes qui lui sont associés aient des performances suffisantes.

Indépendamment de l'avantage que nous venons de signaler, la structure d'un chronomètre de conception classique offre la possibilité d'obtenir des résolutions très élevées car la précision de mesure inhérente à l'organe de comptage peut toujours être augmentée dans un certain rapport, 10 en général, par adjonction d'un dispositif vernier. C'est dans ce but que nous avons par ailleurs étudié et mis au point avec l'aide de G. MATHE, Attaché de Recherche, un vernier à diodes tunnel présentant une résolution propre inférieure à 100 ps, voire 50 ps. (*)

La première partie de notre mémoire est consacrée à l'étude du comptage apériodique à faible temps de résolution. Nous ferons dans le chapitre I une analyse des compteurs qui met en exergue la structure en anneau d'une part, et les circuits logiques à diodes tunnel, d'autre part, quant à leur rapidité naturelle de fonctionnement. A partir de ces résultats, nous avons effectué un essai de synthèse des compteurs, décrit dans le chapitre II, qui nous a conduit à concevoir une décade en anneau à diodes tunnel, montage dans lequel nous utilisons l'étage bistable à diode tunnel au maximum de ses possibilités, malgré sa dissymétrie de fonctionnement.

La diode tunnel est un élément de commutation extrêmement rapide mais elle possède une caractéristique peu précise et peu stable dans le temps ou lorsque la température ambiante varie, c'est pourquoi les circuits logiques correspondants, s'ils sont très performants, ne présentent pas a priori une grande fiabilité, ce qui constitue au yeux de certains utilisateurs un défaut rédhibitoire. Nous montrerons qu'une optimalisation rigoureuse et appropriée du circuit permet de concevoir de tels montages avec une très grande sécurité de fonctionnement, en dépit de l'imperfection du composant.

(*) *Ce travail a fait l'objet de la thèse d'Ingénieur-Docteur de G. MATHE "Etude et réalisation d'un vernier 100 ps" soutenue le 20 décembre 1971 à l'Université de Bordeaux.*

Comme son nom l'indique, l'optimalisation d'un circuit consiste théoriquement à définir le montage optimal en considération soit d'une caractéristique quelconque prise comme critère de performance, soit de la sécurité de fonctionnement, soit de la fiabilité ou bien encore du rendement de fabrication. Ces dernières notions conditionnent de plus en plus le développement de l'électronique contemporaine et justifient par conséquent l'intérêt que l'on accorde à ce type de calcul. L'optimalisation est généralement conçue à partir de l'ensemble des inégalités qui régissent le fonctionnement du montage et s'applique à tout circuit dont on a déterminé un premier schéma de principe et dont on peut établir un modèle mathématique.

La deuxième partie de notre travail concerne l'étude et la mise au point d'une méthode d'optimalisation de la sécurité de fonctionnement d'un circuit en présence de différentes contraintes. Après avoir posé le problème au cours du chapitre III, nous décrivons dans le chapitre IV, les principales méthodes utilisées qui peuvent être classées en deux catégories : les méthodes déterministes et les méthodes statistiques. L'analyse de leur validité, de leurs possibilités et de leurs limites nous a incité à reconsidérer le principe de l'optimalisation pour en déduire par la suite une méthode à la fois plus souple et plus rigoureuse. Cette étude fait l'objet du chapitre V. Nous y décrivons rapidement les processus généraux d'optimalisation résolus en Automatique puis la méthode que nous utilisons pour traiter de façon simple le problème particulier d'un circuit électronique, à l'aide d'un calcul de type déterministe.

La troisième partie du mémoire (Chapitre VI, VII, VIII) constitue indirectement une exemplification de la méthode que nous proposons. Elle est consacrée à la résolution de l'optimalisation, à son application à la décade à diodes tunnel et à la vérification expérimentale sur un montage de test, des conclusions des chapitres précédents. L'analyse des résultats théoriques et pratiques, en suscitant des modifications du schéma de principe ou des conditions de fabrication susceptibles d'augmenter les performances du montage, constitue les préliminaires de l'élaboration éventuelle d'un prototype.

Enfin, le dernier chapitre est réservé à une étude statistique du montage qui nous permet de déterminer sa probabilité de fonctionnement globale et qui correspond de ce fait au complément logique de l'optimalisation proposée.

CHAPITRE I

COMPTAGE APERIODIQUE A FAIBLE TEMPS DE RESOLUTION

PREMIERE PARTIE : Présentation des principaux types de compteurs électroniques rapides

I-1 STRUCTURES DES COMPTEURS

Les compteurs électroniques sont des circuits séquentiels qui ont pour rôle d'enregistrer le nombre d'impulsions appliquées à leur entrée et de restituer cette information sous une forme quelconque. Il s'agit en général de chaînes de diviseurs dont on peut déterminer l'état à tout instant.

L'élément de base du compteur est la bascule bistable, montage qui présente par définition, deux états stables et qui réalise naturellement la division par deux.

Si l'on ne désire pas conserver un système de numération binaire, l'interprétation des résultats nécessairement liée à l'opération de comptage implique l'utilisation d'un code.

Par conséquent, un compteur est généralement composé de deux parties essentielles :

- un ensemble de bascules, en nombre proportionnel au modulo du compteur.
- un réseau combinatoire qui relie entre-eux les divers éléments en fonction du code adopté.

Sa conception doit être précédée de deux choix distincts :

- celui du code.
- celui des bascules de base.

I-1-1 Principaux codes pour compteurs en numération non-binaire

Ces compteurs sont généralement constitués d'une chaîne de bascules utilisées soit en diviseur, soit en mémoire et interconnectées de manière à obtenir une remise à zéro pour l'impulsion de rang égal à la base de numération (7).

Ce sont, bien sûr, les codes de comptage binaire-décimal les plus employés.

Il existe plusieurs possibilités pour traduire les chiffres de 0 à 9 à partir d'un système binaire ; chacune d'elles définit un code. Les principaux sont :

- le code 1-2-4-8 qui consiste en une numération binaire pure avec remise à zéro à 10.
- le code 1-2-4-2 suivant lequel la quatrième bascule de la décade ne présente qu'un poids de 2 au lieu de 8 et pour lequel il existe différentes versions, dont le code AIKEN. Celui-ci est symétrique par rapport à 5 (auto-complémenté à 9).
- le code à excès de trois qui repose sur la suppression des trois premiers et des trois derniers chiffres du système de numération binaire obtenu avec quatre bascules.
- les codes à décalage qui sont caractéristiques des compteurs réalisés à partir de registres à décalage.

Un registre à décalage (ou série) est une chaîne de bascules "mémoires" interconnectées de façon telle que lorsqu'on leur applique simultanément une impulsion d'horloge, chacune d'elles met en mémoire l'information contenue dans celle qui la précède.

Deux de ces codes sont particulièrement utilisés :

- le code en anneau conventionnel selon lequel un chiffre est représenté par un état singulier (niveau 1) au rang qui lui correspond dans la succession des états binaires. On l'obtient directement avec un registre à décalage bouclé sur lui-même, en imposant comme condition initiale qu'une seule bascule soit au niveau 1 ; c'est le compteur en anneau. Il faut dans ce cas dix bascules pour réaliser une décade et le passage d'un chiffre au suivant se traduit par le décalage d'un pas, de l'état singulier.

- le code JOHNSON (ou en anneau torsadé). On remplit progressivement de niveaux 1 la succession d'états binaires puis de niveaux 0 lorsque celle-ci est complète. Il suffit alors de cinq bascules pour réaliser une décade.

I-1-2 Classification des compteurs

Il existe deux types de compteurs.

I-1-2-1 Les compteurs synchrones ou "parallèle"

Toutes les bascules du compteur sont attaquées en parallèle par les impulsions à compter, celles-ci jouant le rôle de signal d'horloge, si bien que les sorties évoluent simultanément vers leur état final.

De par leur nature même, les registres à décalage font partie de ce groupe.

A l'exception de ces derniers pour lesquels l'interconnexion des bascules est évidente et le décodage inutile, les compteurs synchrones nécessitent un réseau combinatoire généralement complexe.

I-1-2-2 Les compteurs asynchrones ou "série"

Seule la première bascule de la chaîne est déclenchée par l'impulsion d'entrée, chacune des autres est attaquée par la sortie de celle qui la précède.

Les commutations des différents étages sont décalées dans le temps ; il peut en résulter des pics parasites dans le circuit de décodage et par suite des erreurs, mais par contre le réseau combinatoire est relativement plus simple que pour les compteurs synchrones.

I-1-3 Pouvoir de résolution des compteurs

Le pouvoir de résolution est caractérisé par le temps minimal séparant deux impulsions successives enregistrées par le compteur. Il est étroitement lié au temps de réponse des bascules.

Dans le cas des compteurs synchrones, il correspond au temps de résolution de chaque bascule ou mémoire ; pour les compteurs asynchrones, il est égal au temps de réponse de la première bascule seule, à condition toutefois qu'il n'y ait pas de réaction dans la chaîne. Une réaction diminue en effet le pouvoir de résolution, le cas le plus défavorable correspondant à celui où elle intervient sur le premier étage.

Remarque : Le temps de résolution d'une bascule est le temps qui s'écoule entre l'instant où elle reçoit une impulsion de déclenchement et le moment où elle atteint son état d'équilibre après commutation.

I-2 PRINCIPAUX CIRCUITS LOGIQUES

Les circuits logiques couramment utilisés pour le comptage rapide sont essentiellement des circuits de commutation à transistors bipolaires. Les différents circuits MOS ne permettent pas à l'heure actuelle d'atteindre des fréquences de comptage de plusieurs dizaines de Mégahertz, c'est pourquoi nous n'en parlerons pas.

I-2-1 Les mémoires

Les premières bascules à transistors étaient constituées de deux transistors couplés de façon à former une boucle fermée produisant une réaction, le blocage de l'un d'eux correspondant à la saturation de l'autre (Montages Eccles Jordan).

De nos jours, l'on fait surtout appel aux circuits de logique combinatoire et les bascules sont généralement réalisées à partir d'un ensemble plus ou moins complexe de portes logiques élémentaires interconnectées. Il apparaît dès lors une distinction entre les mémoires simples et les bascules bistables (12).

I-2-1-1 Les mémoires simples

Les mémoires logiques sont des éléments bistables avec deux entrées actives, l'une pour la mise à un, l'autre pour la remise à zéro (Set et Reset). Les plus simples sont constituées de deux portes logiques élémentaires bouclées l'une sur l'autre. Leur temps de propagation (ou plus précisément de confirmation) est alors égal à deux fois le temps de traversée θ des portes.

$$t_p = 2\theta$$

Il existe aussi des mémoires plus complexes qui utilisent un nombre supérieur de portes ; il s'agit des mémoires avec synchronisation par signal d'horloge telles que les mémoires D (ou Latch) par exemple, pour lesquelles :

$$t_p = 4\theta$$

ou

$$t_p = 3\theta$$

dans certains cas.

Certaines mémoires synchrones, réalisées à partir de portes élémentaires mixtes réunissant les fonctions NAND et NI, ont cependant un temps de confirmation :

$$t_p = 2\theta$$

I-2-1-2 Les bascules bistables

Ce sont des mémoires à une seule entrée qui sert à la fois de mise à un et de mise à zéro.

Elles sont toutes basées sur le même principe : le principe "Maître-esclave". On associe deux mémoires couplées entre-elles, l'une synchronisant sur le front montant de l'impulsion d'horloge, l'autre, sur le front descendant.

Le temps de propagation des bascules est donc généralement égal à quatre fois le temps de traversée de la porte logique élémentaire, augmenté de celui d'un inverseur, soit :

$$t_p = 5\theta$$

Il est toutefois possible d'abaisser ce temps de propagation à trois fois seulement le temps de traversée grâce à une structure particulière de la bascule ($t_p = 3\theta$) (12).

Remarque : Les bascules utilisées dans les circuits intégrés sont très souvent obtenues à partir de mémoires D bouclées sur elles-mêmes.

I-2-2 Technologie des circuits logiques à transistors

Les circuits logiques à transistors peuvent être classés en deux groupes suivant leur mode de fonctionnement :

- le mode bloqué saturé.
- le mode bloqué non-saturé.

I-2-2-1 Circuits logiques en mode de fonctionnement bloqué saturé

Les circuits logiques de ce groupe ont des niveaux logiques bien définis et consomment une faible puissance mais ils ne sont pas très rapides.

Deux technologies sont particulièrement employées.

a) La logique à diodes et transistors (D. T. L.)

La porte élémentaire, constituée d'une porte ET à diodes suivie d'un inverseur à transistor, réalise la fonction NAND. Elle présente, suivant les circuits, un temps de traversée de quelques dizaines de nanosecondes.

Cette logique est disponible en circuit intégré.

b) La logique à transistors et transistors (T. T. L.)

Elle est déduite de la précédente par remplacement des diodes de portes par des jonctions Base-Emetteur et Base-Collecteur de transistors.

Le transistor de porte ne sort pas de la saturation ce qui conduit à un faible temps de traversée pour le module ; quelques nanosecondes. Cependant les circuits intégrés disponibles dans cette technologie associent un étage de puissance, de type totem-pole, à la porte logique et ils présentent de ce fait, un temps de propagation supérieur à une dizaine de nanosecondes.

L'adjonction de diodes Schottky au niveau du transistor inverseur améliore ce temps de traversée (3 ns environ) mais ne permet pas toutefois d'atteindre la rapidité intrinsèque du module T. T. L. seul (3).

Des circuits T. T. L. bas niveau, appelés ainsi par opposition aux précédents, ont été réalisés au Laboratoire avec des temps de propagation proches de 1 ns.

I-2-2-2 Circuits logiques en mode de fonctionnement bloqué non-saturé

Les circuits de ce groupe sont plus rapides que les précédents mais leurs niveaux logiques sont assez mal définis ; ils varient en particulier avec les tensions d'alimentation et les résistances de polarisation.

Une seule technologie a été développée et utilisée dans le domaine des circuits intégrés ; c'est la technologie E. C. L. (logique à transistors à émetteurs couplés). Le montage de base est un amplificateur différentiel à transistors, l'une des entrées étant fixée à un potentiel continu compris entre les deux niveaux logiques. Parmi les versions de ce module logique en circuits intégrés, deux sont particulièrement connues sous les noms de MECL II et MECL III ; l'une présente un temps de traversée de 4 ns, l'autre de 1 ns mais son utilisation est plus délicate.

D'autres circuits logiques travaillant en mode non-saturé sont actuellement à l'étude dans divers laboratoires ou ont déjà vu le jour comme les circuits :

- M. U. R. (C. N. E. T.) (22)
- N. I. R. A. P. (C. G. E.) (1)
- le cascode complémentaire, etc. ...

Ils présentent les mêmes défauts que les circuits MECL, avec de surcroît une immunité au bruit inférieure et une variation sensible du temps de traversée en fonction du fan-out. Ces modules logiques ne sont pas intégrés mais réalisés en circuits hybrides en couche épaisse. Leur temps de propagation est de l'ordre de 1 ns.

I-3 PERFORMANCES ACTUELLES DE CES COMPTEURS

Nous avons vu que les portes logiques les plus rapides ont un temps de traversée θ proche de 1 ns.

Les fréquences maximales de comptage que l'on pourra théoriquement atteindre avec ces circuits à transistors seront par conséquent égales à :

- $F_M = \frac{1}{5\theta} = 200$ MHz — pour les compteurs de conception classique.

- $F_M = \frac{1}{3\theta} = 330$ MHz — pour certains compteurs réalisés à partir de bascules particulières.

- $F_M = \frac{1}{2\theta} = 500$ MHz — pour les compteurs en anneau constitués de mémoires synchrones simples (R. S. H.); à condition toutefois que la porte élémentaire nécessaire à la réalisation de ce type de mémoire (porte mixte) existe dans les technologies considérées.

Remarques : Ce dernier type de compteur ne fonctionne qu'avec des impulsions calibrées en temps et d'autre part, les portes logiques rapides, considérées ici, ont une sécurité de fonctionnement relativement réduite.

Parmi tous les circuits de comptage à transistors, le compteur en anneau réalisé à partir de mémoires synchrones simples est celui qui permet d'obtenir le plus faible temps de résolution (t_r = 2 ns). Si l'on veut dépasser cette limite théorique imposée par la technologie actuelle, il est nécessaire d'utiliser des éléments bistables intrinsèquement plus rapides. Nous allons voir que les circuits de commutation à diodes tunnel remplissent cette condition.

DEUXIEME PARTIE : Utilisation de la diode tunnel pour le comptage rapide.

I-4 CIRCUITS DE COMMUTATION A DIODES TUNNEL

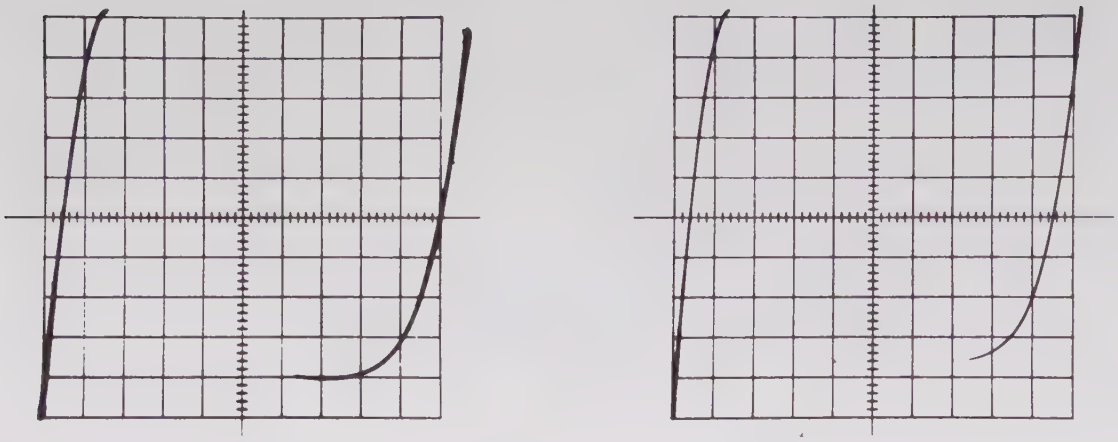
I-4-1 La diode tunnel

Découverte en 1957 par ESAKI, la diode tunnel est formée à partir d'une jonction abrupte entre deux matériaux de type N et P très fortement dopés de façon à réduire l'épaisseur de la zone de transition (celle-ci peut être inférieure à 100 Å). Le niveau de FERMI est placé à l'intérieur de la bande de conduction côté N et à l'intérieur de la bande de valence côté P ; on dit que le semi-conducteur est "dégénéré". Il en résulte une barrière de potentiel de très faible valeur ce qui explique la présence d'un effet tunnel appréciable.

I-4-1-1 Courbe caractéristique de la diode tunnel

Il est possible de calculer mathématiquement la forme exacte de la caractéristique de l'élément à partir de la théorie statistique de l'effet tunnel (11) ; on peut aussi l'expliquer qualitativement par un raisonnement physique en considérant les positions relatives des bandes de conduction et de valence de chaque côté de la jonction, pour différentes tensions de polarisation (13) (24).

Tandis que dans le sens inverse, le courant dû à l'effet tunnel croît uniformément en fonction de la tension, dans le sens direct, ce courant passe par un maximum puis tend à s'annuler mais il est alors remplacé par le courant de diffusion classique de la jonction. La caractéristique statique I = f(v) présente donc une zone où la résistance différentielle est négative, encadrée de deux zones à résistance positive. La figure I-1 reproduit à titre d'exemple l'allure de la caractéristique obtenue pour deux diodes tunnel au germanium. On appelle pic et vallée les points pour lesquels la résistance dynamique est infinie et tension isohypse V_F, l'abscisse du point de la deuxième branche positive qui correspond à un courant égal au courant de pic (figure I.2).



a) Diode tunnel RCA 40 572
Echelle horiz. : 50 mV/carreau
Echelle vert. : 1 mA/carreau

b) Diode tunnel G. E. TD 715
Echelle horiz. : 50 mV/carreau
Echelle vert. : 0,2 mA/carreau

Figure I-1 Caractéristiques de diodes tunnel au germanium

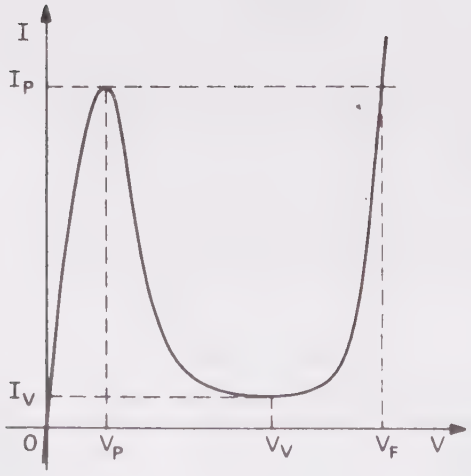


Figure I-2 Caractéristique théorique de la diode tunnel

Les principaux paramètres de la diode tunnel dépendent essentiellement de la nature du matériau semi-conducteur de base. Leurs valeurs typiques sont récapitulées dans le tableau ci-dessous, pour des composants au germanium, au silicium et à l'arséniure de gallium (19).

Matériau de la diode	V_P (V)	V_V (V)	V_F (V)	$\frac{I_P}{I_V}$
Germanium	0,055	0,350	0,500	8 à 10
Silicium	0,065	0,400	0,700	3 à 4
Arséniure de Gallium	0,150	0,500	1,100	15

On peut remarquer que les diodes au silicium ont un faible rapport I_p/I_v, inconvénient qui, ajouté à une faible vitesse de commutation et à une difficulté importante de fabrication (26), explique leur emploi relativement limité.

L'allure de la caractéristique, pour un matériau donné, ne dépend pas de la valeur du courant de pic ; celui-ci est généralement compris entre 1 et 100 mA. Il existe également des diodes tunnel de courant de pic inférieur au milliampère mais elles sont le plus souvent utilisées en inverse comme détecteur ou redresseur faibles signaux et pour cette raison, on les appelle des diodes "backward". Elles présentent en effet une résistance faible dans un sens et très grande, négative de surcroît, dans l'autre.

La courbe résultante peut être traduite de façon assez proche par un polynôme du cinquième degré en V (21), toutefois une approximation linéaire, quadratique ou exponentielle suivant la zone considérée, suffit en général pour étudier le comportement de l'élément en régime de commutation.

I-4-1-2 Schéma équivalent de la diode tunnel

Outre sa caractéristique statique décrite précédemment, d'autres paramètres définissent le comportement de la diode tunnel. Il s'agit :

- de la capacité C_j de la zone de charge d'espace inhérente à toute jonction.
- de la résistance série R_s que présentent les connexions et le semi-conducteur en dehors de la jonction.
- de l'inductance L_s des connexions ; sa valeur dépend essentiellement du boitier de la diode et bien sûr de la longueur des liaisons au sein du montage.

On peut en déduire le schéma équivalent reproduit sur la figure I.3 où le symbole de la diode tunnel représente l'élément défini par la caractéristique statique seule.

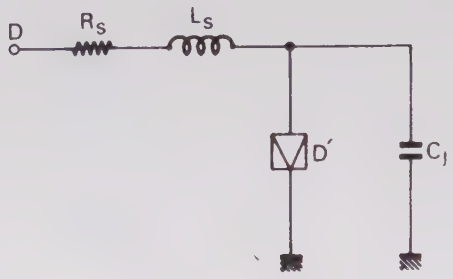


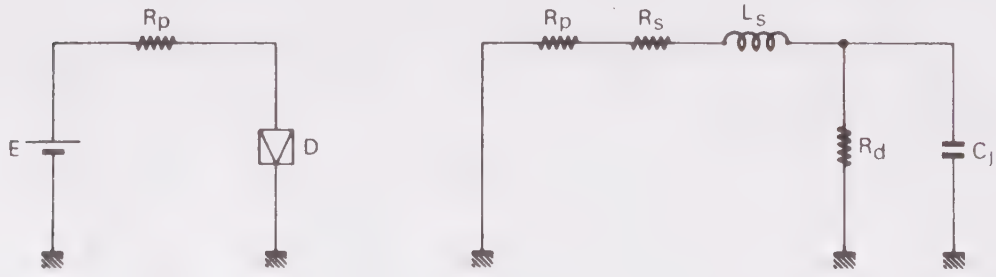
Figure I-3 Schéma équivalent de la diode tunnel

La capacité C_j varie en réalité avec la tension aux bornes de la jonction suivant une loi en $V^{-1/2}$ (24) si bien que le schéma n'est rigoureux que pour de faibles variations autour d'un point de fonctionnement donné. En régime de commutation, on prend généralement pour C_j la valeur moyenne C_v correspondant à la région de vallée.

Pour une diode tunnel au germanium de 10 mA de courant de pic par exemple, on mesure une résistance R_s de quelques ohms, une capacité C_v inférieure à 10 pF et une inductance de l'ordre de 1 nH.

I-4-1-3 Conditions de stabilité

Soit une diode tunnel polarisée par une tension d'alimentation E et une résistance R_p selon le schéma de la figure I.4.a.



a) *Circuit de polarisation* b) *Schéma équivalent aux variations*

Figure I-4 Schéma équivalent aux variations d'une diode tunnel

Pour de faibles variations autour d'un point de fonctionnement donné, il est possible de remplacer la diode théorique par sa résistance équivalente R_d que définit une linéarisation de la caractéristique.

La résolution de l'équation du circuit du second ordre ainsi constitué permet de mettre en évidence une double condition de stabilité. Pour que le point de fonctionnement considéré soit stable il faut que l'on ait simultanément (21) :

$$R.C_j + \frac{L_s}{R_d} > 0$$

$$1 + \frac{R}{R_d} > 0$$

avec $R = R_p + R_s$

Ces deux conditions sont toujours vérifiées quand R_d est positif, en revanche elles deviennent effectives dans le cas contraire.

Soit R_n la valeur absolue de la résistance R_d de la diode tunnel, lorsqu'elle est négative.

$$R_d = - R_n < 0$$

Il vient la double condition de stabilité pour ce montage série :

$$\frac{L_s}{C_j.R_n} < R < R_n$$

Si l'une ou l'autre des inégalités n'est pas satisfaite le circuit sera le siège d'oscillations mais celles-ci seront de nature différente suivant la condition mise en jeu. L'inégalité $R > R_n$ entraîne une instabilité de type commutation tandis que l'inégalité $R < L_s/C_j.R_n$ conduit à une instabilité de type oscillation de relaxation (14) (21).

I-4-1-4 Utilisation de la diode tunnel

Il existe de nombreuses applications distinctes de la diode tunnel qui découlent des différents régimes de fonctionnement que l'on peut observer en fonction de sa polarisation et donc de la position de la droite de charge sur la caractéristique.

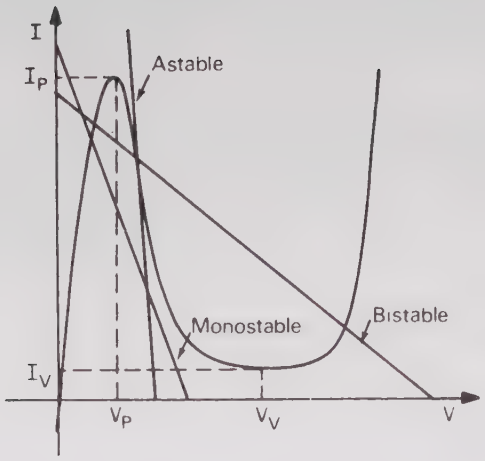


Figure I-5

C'est ainsi qu'il est possible de réaliser :

- des amplificateurs en polarisant la diode dans la zone à résistance négative tout en respectant la double condition de stabilité :

$$\frac{L_s}{C_j.R_n} < R < R_n$$

La fonction amplification est alors obtenue par désamortissement du circuit.

- des oscillateurs sinusoïdaux en polarisant la diode dans la zone à résistance négative avec une résistance de charge $R < R_n$ et en introduisant dans le circuit une inductance série L_c de façon à vérifier la condition :

$$R < \frac{L}{C_j.R_n} \qquad \text{avec} \qquad L = L_c + L_s$$

- des bascules astables en polarisant la diode comme précédemment mais avec cependant une inductance L_c de forte valeur ; on observe alors des oscillations de relaxation dans la mesure où la courbe de charge dynamique pour des variations rapides a une pente beaucoup plus faible que la caractéristique dans la zone négative. L'inductance pourrait être remplacée par un dispositif possédant une impédance différente en statique et en dynamique.

- des bascules monostables en polarisant la diode tunnel avec un seul point de fonctionnement stable dans une zone à résistance positive et en lui associant un dispositif dont l'impédance dynamique est supérieure à l'impédance statique ; on peut utiliser une inductance, une ligne court-circuitée, etc. ...

- des bascules bistables en polarisant la diode tunnel avec une résistance $R > R_n$, auquel cas on obtient trois points de fonctionnement dont deux sont stables.

C'est principalement à cette dernière application que font appel les circuits logiques à diodes tunnel.

I-4-2 Montage bistable à diode tunnel

I-4-2-1 Principe de fonctionnement

Soit une diode tunnel polarisée en bistable.

La droite de charge coupe la caractéristique en trois points dont deux sont stables. Les impulsions de commande, alternativement positives et négatives, provoquent son déplacement au-delà du pic et en deçà de la vallée, ce qui oblige le point de fonctionnement à sauter chaque fois d'un point stable à l'autre en suivant une trajectoire confondue avec la droite de charge si l'on néglige l'influence de l'inductance L_s.

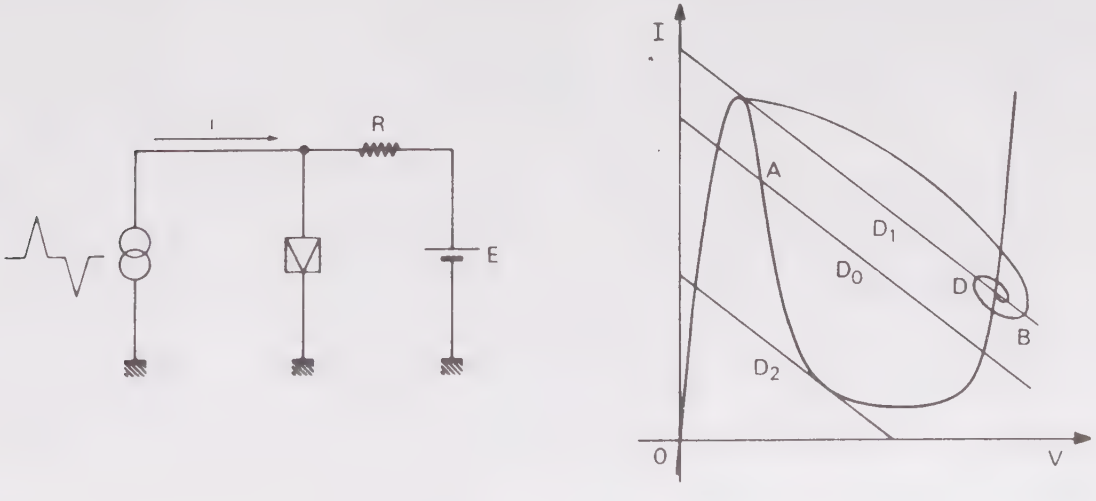


Figure I-6 Montage bistable à diode tunnel

Le front de tension observé sur la diode tunnel lors d'une commutation correspond à la charge (ou à la décharge) de la capacité C_v.

La condition $R > L_s/C_v.R_n$ est toujours vérifiée, par conséquent il n'y aura pas d'oscillation de relaxation; cependant la présence d'une inductance L_s de valeur appréciable peut provoquer des oscillations amorties lors du basculement de la diode tunnel. Ce phénomène correspond au régime oscillatoire amorti du circuit R.L.C. considéré. Dans ce cas, le point de fonctionnement se déplace suivant une courbe de charge dynamique plus ou moins spiralée autour du point stable d'arrivée (5).

Lorsqu'elles existent, les oscillations diminuent considérablement l'intérêt des circuits de commutation à diode tunnel, c'est pourquoi il est nécessaire non seulement de réduire au minimum la longueur des connexions au sein d'un câblage mais également de choisir avec soin le composant en fonction du boitier dans lequel il est disponible.

Remarque : Si le montage considéré est au régime amorti, il est théoriquement possible d'améliorer sa réponse en ajoutant une inductance supplémentaire de façon à obtenir le régime critique (26). En pratique cette opération est délicate à réaliser dans la mesure où elle ne peut l'être que par tâtonnement sur le montage lui-même et elle n'apporte pas une amélioration sensible, car seule la variation du courant dans la charge R nous intéresse. Le régime critique correspond bien à une diminution du temps de montée mais il provoque également un retard du signal utile, la somme des deux n'étant guère modifiée. Une étude précise de l'effet d'une inductance additionnelle sur la réponse de ce circuit non linéaire est réalisable à l'aide d'un programme d'analyse de circuits électroniques (ECAP) (10) mais sa complexité ne justifie pas le gain que l'on peut en attendre.

I-4-2-2 Temps de commutation des diodes tunnel

Le temps de commutation intrinsèque, donné par le constructeur, correspond au basculement de la diode tunnel dans son état de haut potentiel, à courant constant. (passage du point de fonctionnement de P en F sur la caractéristique de la figure I.7). Il est donc indépendant de l'inductance parasite de l'élément.

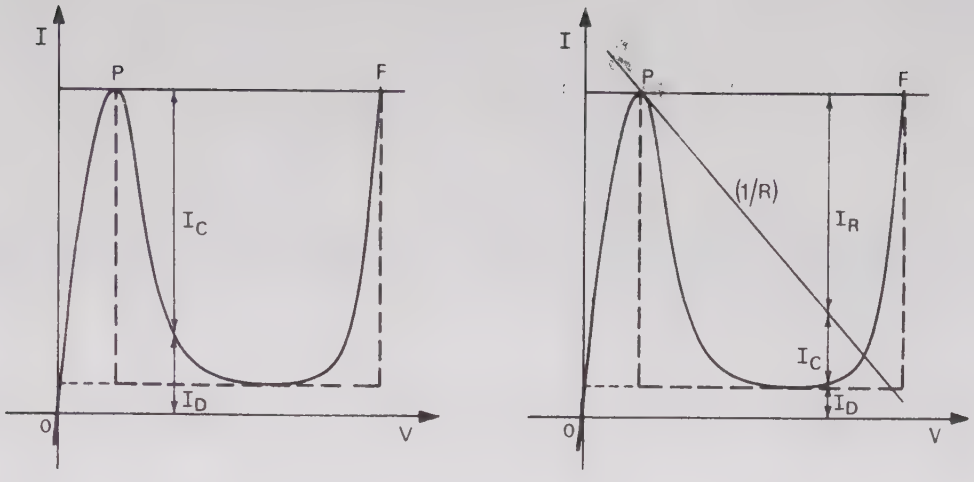


Figure I-7

Si l'on dissocie la capacité de la jonction dans la zone de vallée C_v, de l'élément actif défini par la caractéristique statique I = F(V), on peut considérer qu'à un instant donné t, en cours de basculement, il circule un courant I_D dans la diode théorique et par conséquent un courant $(I_p - I_D)$ dans la capacité C_v.

La commutation de la diode correspond à la charge de la capacité C_v de V_p à V_f à courant pratiquement constant, égal à $(I_p - I_v)$ si l'on suppose la caractéristique rectangulaire entre les points P et F.

Il vient :
$$t_m \simeq \frac{V_f - V_p}{I_p - I_v} C_v$$

En réalité cette expression doit être affectée d'un facteur de forme pour tenir compte de la caractéristique exacte. Ce coefficient peut être déterminé graphiquement (17) (25) ; il est à peu près constant pour un matériau de base donné.

C'est ainsi que pour calculer les temps de commutation extrêmement brefs de leurs diodes tunnel au germanium, les constructeurs utilisent généralement la relation :

$$t_m = 0{,}5 \cdot \frac{C_v}{I_p}$$

avec t_m en seconde si C_v est en Farad et I_p en Ampère.

ou bien t_m en ns si C_v est en pF et I_p en mA.

Une simple observation de l'allure de la caractéristique nous permet de prévoir que le temps de descente d'une diode tunnel sera supérieur à son temps de montée à cause de l'asymétrie de la courbe.

Nous pouvons constater en outre que le temps de commutation d'un étage bistable chargé sera plus grand que le temps de montée intrinsèque de la diode. En effet, lorsque celle-ci est shuntée par une résistance R, le courant I_c qui charge la capacité C_v, au cours du saut, est plus faible que précédemment à cause du courant I_R dans R.

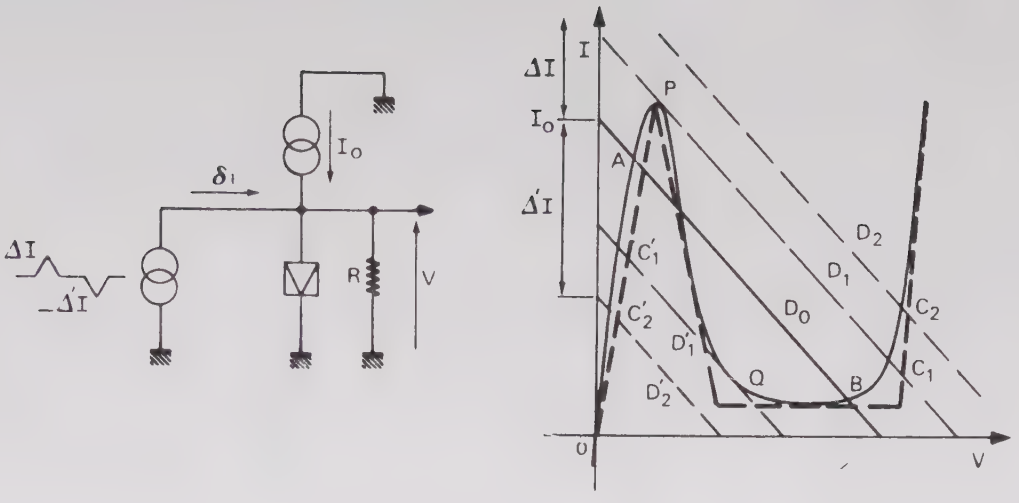
$$I_c = I_p - I_D - I_R$$

Un calcul très simple, à partir de la caractéristique linéarisée, nous montrerait que l'accroissement du temps de montée peut atteindre un facteur voisin de 2,7 pour une charge importante (lorsqu'elle est purement résistive).

Parmi les différentes diodes tunnel qui existent, ce sont les composants au germanium les plus rapides. La diode "Général Electric", TD 256 A, par exemple, possède un courant de pic de 100 mA, une capacité C_v maximale de 6 pF et par conséquent un temps de montée théorique inférieur à 30 ps.

I-4-2-3 Forme de la tension aux bornes d'un étage bistable (4)

Afin de mettre en évidence les particularités d'un étage bistable à diode tunnel, nous allons étudier de façon schématique sa réponse à des impulsions de déclenchement triangulaires. Pour cela, nous considérerons la caractéristique linéarisée de la diode tunnel et nous négligerons les temps de commutation.



a) *Schéma de montage* b) *Position de la droite de charge*

Figure I-8 Montage bistable à diode tunnel

Soit le montage bistable de la figure I.8.a. La droite de charge au repos occupe la position D_o de pente 1/R. Elle coupe la caractéristique aux points A et B qui correspondent à deux états stables. Les changements d'états de la bascule sont obtenus en appliquant des impulsions de courant δ_i, soit positives soit négatives, qui déplacent momentanément la droite de charge jusqu'en D_2 ou en D'_2.

Soit une impulsion de commande positive d'amplitude ΔI appliquée à l'instant initial. Le point de fonctionnement se déplace de A en P au fur et à mesure que la droite de charge est décalée vers le haut, puis il saute très rapidement en C_1 à l'instant t_1 et remonte le long de la caractéristique jusqu'en C_2 avant de rejoindre le point B qu'il atteint au temps t_3, lorsque l'impulsion est terminée. Une impulsion négative produirait le basculement inverse suivant un processus identique.

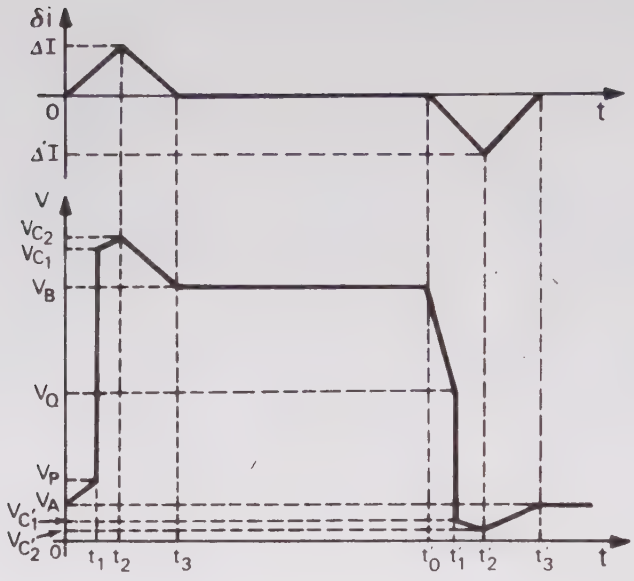


Figure I-9 Diagramme de la tension de sortie

Le diagramme de la tension de sortie représenté sur la figure I.9 nous apporte plusieurs enseignements :

- chaque basculement intervient avec un retard fonction de la forme de l'impulsion de déclenchement.

- les changements d'états sont suivis de dépassements dus à la superposition des impulsions de déclenchement (inconvénient du montage dipôle).

- la montée et la descente du signal ne sont pas symétriques ; les retards, les dépassements et surtout les amplitudes des fronts raides sont très différents. Il faut ajouter à cela l'inégalité de la durée des fronts comme nous l'avons vu précédemment.

Cette asymétrie, que laissait prévoir la forme de la caractéristique, constitue l'inconvénient majeur de la bascule bistable à diode tunnel.

D'autre part, la vallée de la diode tunnel correspond à la caractéristique d'une jonction classique au germanium, c'est pourquoi il faut s'attendre à une imprécision importante sur le niveau haut de tension due :

- à la dispersion sur la tension de vallée.
- à la variation de cette dernière avec la température.
- à l'évolution de la caractéristique dans le temps.

Tous ces défauts constituent certes un frein à l'utilisation de la diode tunnel dans les circuits de commutation rapides mais il faut bien s'en accommoder dans la mesure où il n'existe pas actuellement d'autre solution pour obtenir des temps de résolution de quelques centaines de picosecondes seulement. Il sera cependant indispensable de faire une optimalisation effective de ces montages compte tenu des imperfections du composant et de ses conditions d'emploi, si l'on désire concevoir des circuits de comptage performants avec une sécurité de fonctionnement satisfaisante, notamment pour des réalisations industrielles. C'est à cette optimalisation que nous consacrerons les chapitres suivants.

I-4-3 Circuits logiques à diodes tunnel

I-4-3-1 Circuits de logique combinatoire

La diode tunnel réalise un bon discriminateur en raison de la forme aiguë de sa caractéristique au voisinage du pic, ce qui justifie son utilisation dans les circuits de logique à seuil (9), (15), (23).

On peut obtenir une porte ET ou une porte OU, à deux entrées ou plus, avec une polarisation adéquate de la diode. Cependant, à cause de son caractère bidirectionnel, il est nécessaire de lui associer des éléments directifs pour l'inclure dans un réseau combinatoire.

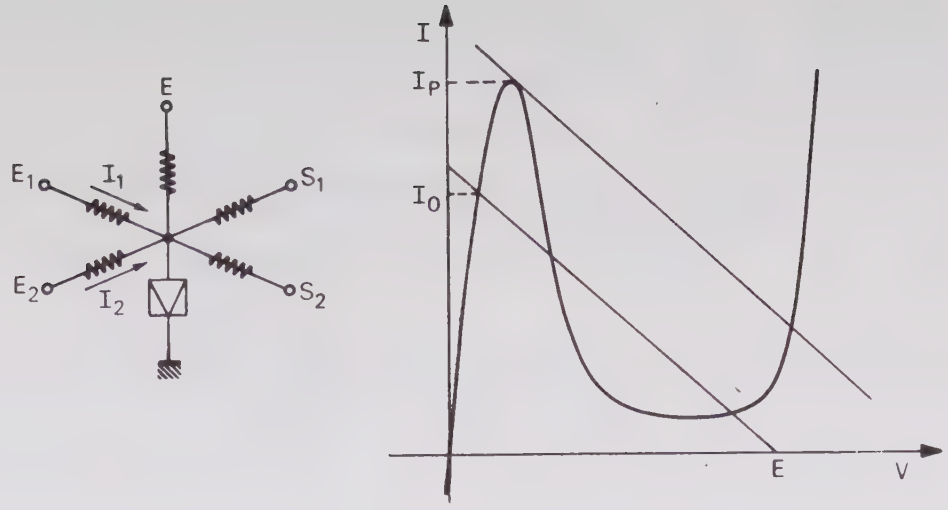


Figure I-10 Porte ET : $\frac{I_p - I_o}{2} < I_1, I_2 < (I_p - I_o)$

Porte OU : $I_1, I_2 > (I_p - I_o)$

Dans le cas de composants au germanium, l'écart logique est tout juste suffisant pour atteindre la conduction d'une diode classique, aussi utilise-t-on souvent des diodes backward comme éléments de couplage.

L'information est conservée en mémoire lorsque la diode tunnel est polarisée en bistable au repos, mais une remise à zéro de l'étage doit alors précéder son utilisation nouvelle. Le fan-in et le fan-out de ce circuit seront faibles car il ne faut pas charger excessivement la diode tunnel si l'on veut conserver une sécurité de fonctionnement correcte, compte tenu des tolérances sur les différents éléments constitutifs.

On peut également réaliser un inverseur dans cette technologie en plaçant deux diodes tunnel en série comme l'indique la figure I.11.

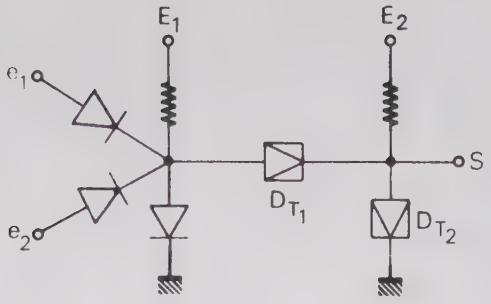


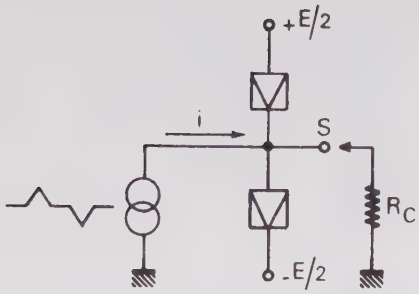
Figure I-11 Inverseur à diodes tunnel

En fait, ce module présente un fonctionnement séquentiel. L'application de la tension d'alimentation E_1 seule provoque ou non le basculement de la diode tunnel série D_{T1} suivant le niveau des entrées, ce qui produit un courant de polarisation plus ou moins élevé dans D_{T2} et par suite une commutation éventuelle de l'étage de sortie lors de l'apparition différée de la tension E_2.

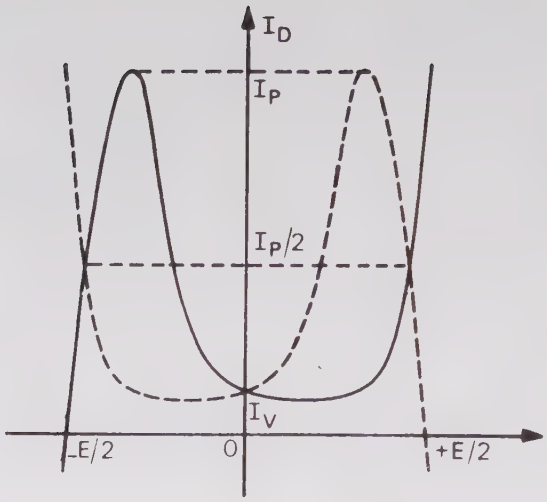
Les diodes D_{T1} et D_{T2} sont toujours dans des états complémentaires.

L'association diode tunnel-transistor conduit à des montages inverseurs apparemment plus simples mais avec des temps de traversée supérieurs. On ne bénéficie plus de la rapidité intrinsèque des diodes tunnel. D'autre part, si l'adjonction d'un transistor au germanium ne pose aucun problème, il n'en est pas de même pour les transistors au silicium car il faut alors introduire des décalages en tension pour compenser l'insuffisance des sauts fournis par les diodes.

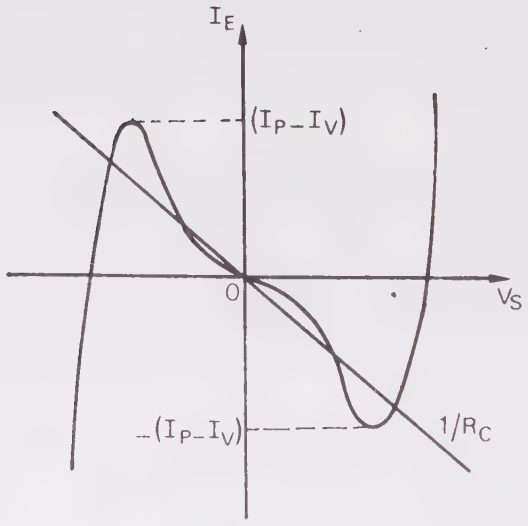
Remarque : Les diodes tunnel au silicium et à l'arséniure de gallium qui ont des excursions de tension supérieures, peuvent être facilement associées à des transistors au silicium mais elles sont beaucoup moins rapides.



a) Schéma du montage



b) Caractéristiques des diodes



c) Caractéristique composite

Figure I-12 La paire de GOTO

I-4-3-2 Circuits de logique séquentielle

La diode tunnel se prête beaucoup mieux à la conception directe de circuits séquentiels (9) (16) (23).

Le montage bistable que nous avons déjà vu peut être considéré comme un circuit logique. Il est assimilable à une mémoire simple lorsqu'on applique les signaux de commande sur deux voies différentes suivant leur polarité, ou bien à une bascule bistable si l'on n'utilise qu'une seule entrée, mais il s'agit alors d'une bascule particulière puisqu'elle doit être déclenchée par des impulsions alternativement positives et négatives. Il est possible de remédier à cette asymétrie de fonctionnement en prenant deux diodes tunnel placées en série et polarisées de façon à travailler en opposition, la commutation de l'une entraînant la remise à zéro de l'autre.

Deux montages sont souvent utilisés :

a) La paire de GOTO dont le schéma de principe est représenté sur la figure I.12.

Les impulsions de déclenchement sont appliquées au point milieu du montage qui sert également de sortie. Chacune des diodes tunnel est chargée par l'autre branchée en inverse si bien que la caractéristique composite et par suite le fonctionnement du circuit sont symétriques, à condition toutefois que les composants soient absolument identiques. En réalité, cette hypothèse est quelque peu illusoire car il est difficile d'apparier les diodes en tenant compte simultanément des caractéristiques statiques, dynamiques et de leurs évolutions dans le temps.

b) La bascule bistable à deux diodes tunnel.

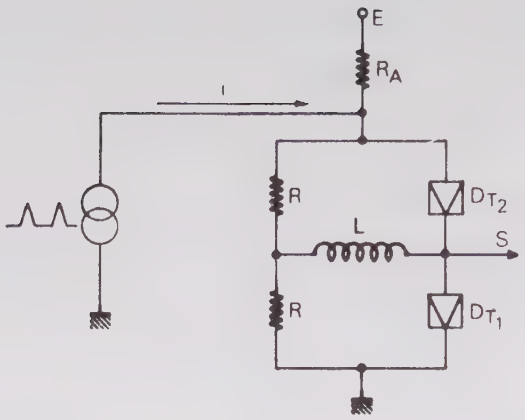
Ce montage dont le schéma est représenté sur la figure I.13 est une véritable bascule bistable puisque les impulsions de déclenchement, appliquées sur une seule entrée, sont de même polarité (6).

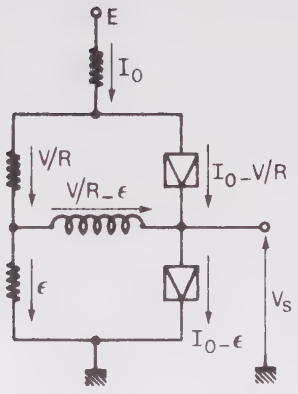
La valeur de la résistance R_A est choisie de façon que le basculement d'une diode entraîne la remise à zéro de l'autre, grâce à la présence de l'inductance L.

Dans ces conditions les impulsions de commande peuvent être aussi bien positives que négatives (26).

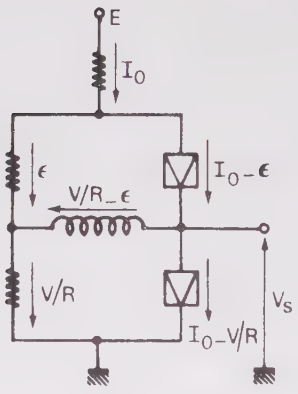
Figure I-13

Bascule bistable à deux diodes tunnel





a) Etat "0"



b) Etat "1"

Figure I-14 Distribution des courants dans la bascule bistable

Nous avons représenté sur les schémas de la figure I.14, les distributions des courants dans le circuit pour les deux états stables ; elles sont symétriques par rapport aux deux diodes.

On peut en déduire qu'il existe un temps de récupération non négligeable lié à l'inversion de courant dans l'inductance L ce qui introduit une limite de la fréquence maximale d'utili-

sation. Remarquons également que contrairement à la paire de GOTO, la présence d'une résistance de charge détruit la symétrie de fonctionnement.

I-4-4 Circuits de comptage à diodes tunnel

Les principaux compteurs à diodes tunnel réalisés à ce jour sont des échelles binaires asynchrones conçues à partir de la bascule bistable décrite précédemment. Les plus performants atteignent une fréquence maximale de comptage de 1 GHz. (2) (6) (15). Il ne semble pas que cette limite puisse être dépassée car le temps de résolution de la bascule, lié à la structure du circuit, est nécessairement supérieur au temps de montée intrinsèque des diodes tunnel.

Pour franchir cette limite, il est nécessaire de concevoir un montage qui ne mette en cause que la montée des éléments bistables. C'est dans cette optique que nous avons étudié au Laboratoire, depuis déjà quelques années, un compteur en anneau dont le temps de résolution n'est pratiquement limité que par le temps de commutation des diodes tunnel utilisées. Son avantage provient de l'utilisation de l'étage bistable à diode tunnel en mémoire synchrone (RSH) obtenue par adjonction de la fonction ET à la fonction mémoire, dans une chaîne de comptage où seul compte le changement d'état "0" - "1".

BIBLIOGRAPHIE DU CHAPITRE I

(1) F. D'ABOVILLE

Application du système NIRAP de logique 1 ns non saturée. Colloque sur 1'Electronique impulsionnelle rapide - Grenoble - Février 1970.

(2) A. ASSADOULAH

Chronomètre 1 ns par comptage direct à 1 GHz - Colloque sur 1'Electronique Impulsionnelle Rapide - Grenoble - Février 1970.

(3) J. L. AUCOUTURIER

Technologies des circuits intégrés - "Actualisation" - Circuits Intégrés ADERA - Bordeaux 1972.

(4) J. L. AUCOUTURIER - G. LACROIX

Exercices et Problèmes - Circuits et dispositifs électroniques-Dunod Université - Paris 1970.

(5) P. BAYLOU

Etude et réalisation d'un démodulateur à large bande 10-150 MHz. Thèse de Doctorat en Physique - Mention Electronique - Bordeaux - Décembre 1968.

(6) P. BERNARD

Circuit logique bistable à retard - Colloque sur 1'électronique Nucléaire rapide - Grenoble - Février 1966.
L'Onde Electrique - Vol. 46 - n° 472-473 - pp. 885-888 - Juillet-août 1966.

(7) J. P. BUSSET

Etude comparative des dispositifs de comptage électroniques. Application à la réalisation d'un compteur "200 MHz" - Thèse de Doctorat en Electronique - Bordeaux - juillet 1970.

(8) P. CHARTIER

Utilisation de la diode tunnel pour l'amplification d'impulsions nanosecondes.
Centre d'Etudes Nucléaires de Grenoble - Rapport C. E. A. - R - 3790 - 1970.

(9) W. F. CHOW

Tunnel diode digital circuitry - I. R. E. Transactions on Electronic Computers - (9) - n° 3 - pp. 295 - September 1960.

(10) S. DEGUEIL

Etude et réalisation d'un vernier pour chronométrie rapide 1 ns. Thèse de Doctorat en Physique - mention Electronique - Bordeaux - Juillet 1970.

(11) R. DESCHAMPS

Diodes à effet tunnel.
L'Onde Electrique - Vol. 41 - Février 1961 - pp. 132-139.

(12) J. P. DOM

- Mémoires et bascules bistables en circuits logiques intégrés-"Actualisation".
- Circuits séquentiels complexes : registres - compteurs " Prospective".

Circuits Intégrés - ADERA - Bordeaux 1972.

(13) H. DORMONT

Généralités sur l'effet "tunnel".
ACTA-ELECTRONICA - Vol. 7 - n° 3 - pp. 195-198.

(14) J. FRALEUX

Techniques de préparation des diodes "tunnel"
ACTA ELECTRONICA - Vol. 7 - n° 3 - pp. 223-234.

(15) M. HAMEL

Logiques rapides synchrones - circuits logiques à "MOST"
Journées de Microélectronique - C. E. A. - D. A. M. - Novembre 1966.

(16) G. B. HERZOG

Utilisation de la diode tunnel comme élément de calcul à vitesse extrêmement élevée - L'Onde Electrique n° 409 - pp. 370-381 - Avril 1961.

(17) G. LACROIX

Etude d'un générateur d'écriture pour mémoires à couche magnétique mince - Thèse de Doctorat en Electronique - Bordeaux - Avril 1966.

(18) R. LEVAL

Réalisation en couches épaisses sur céramique de deux circuits impulsionnels très rapides - Colloque sur l'Electronique Impulsionnelle rapide - Grenoble Février 1970.

(19) J. MILLMAN - H. TAUB

Pulse, digital and switching waveforms.
Mc GRAW-HILL Book Company INC - International Student Edition - New York - 1965.

(20) M. PATRUTESCU

Diodele tunel si utilizarea lor - Editura Academiei Republicii Socialiste România - Bucuresti - 1968.

(21) J. REVUZ

Fonctionnement des diodes "tunnel" : régime stable et régimes instables - ACTA ELECTRONICA - Vol. 7 - n° 3 - pp. 207-222.

(22) MM. ROUZIER, SERRAND et Mme LE MEN

Circuits logiques sub-nanosecondes - MUR - Colloque International sur la Microélectronique avancée - Paris - Avril 1970.

(23) G. G. SCARROTT - R. W. MITCHELL

High speed logic circuits using a tunnel diode transistor feedback amplifier - Radio Electronic Engeenering G. B. (26) n° 6 - pp. 485-491 - Décember 1963.

(24) A. SCHMITZ

Généralités sur l'effet "tunnel".
ACTA-ELECTRONICA - Vol. 7 - n° 3 - pp. 195-198.

(25) J. K. SKILLING

Simple method for plotting Tunnel-Diode switching waveforms-Electronics - U. S. A. (35) - n° 50 - pp. 49-50 - December 1962.

(26) J. P. VABRE

Electronique des impulsions - Tome III - Ed. MASSON - Paris 1970.

(27) F. VALENTIN - G. BOUSSEAU

Circuits et dispositifs électroniques - Dunod Université - Paris 1969.

CHAPITRE II

COMPTEUR EN ANNEAU A DIODES TUNNEL (*)

De l'analyse des compteurs traitée succinctement dans le chapitre précédent, il ressort que la structure en anneau est celle qui offre le plus faible temps de résolution pour un type de circuit logique donné à condition qu'il existe des mémoires synchrones élémentaires dans la technologie considérée. Il apparaît également que les bascules bistables simples à diode tunnel sont intrinsèquement les plus rapides ; elles permettent de réaliser facilement des portes mixtes associant plusieurs fonctions logiques, mais elles présentent une asymétrie de fonctionnement avec une transition privilégiée.

Toutes ces considérations nous ont suggéré la conception d'un compteur en anneau à diodes tunnel, montage dans lequel nous mettons à profit simultanément, les particularités de la structure et celles du circuit, comme nous allons le voir.

II-1 LE COMPTEUR EN ANNEAU

C'est un registre à décalage bouclé sur lui-même et auquel on impose qu'un étage et un seul soit au niveau "1" à l'instant initial. Il est constitué d'une chaîne de mémoires

(*) *Le principe de ce circuit de comptage que nous avons étudié au Laboratoire depuis plusieurs années et utilisé dans différents montages, a fait l'objet de nombreuses publications (1, ..., 8).*

synchrones branchées en cascade et commandées en parallèle de façon à inscrire dans chacune d'elles l'information contenue dans la précédente. A chaque impulsion d'horloge, l'état singulier (niveau "1") progresse d'un pas.

Le temps de résolution de l'anneau est égal au temps de traversée de la mémoire synchrone, mais il faut toutefois remarquer que seule compte la réponse de la mémoire lorsqu'elle prend l'état singulier. La transition complémentaire n'intervient pas dans la résolution ; tout au plus sa durée excessive pourrait nuire à une lecture au vol, mais s'il en était ainsi, un circuit de décodage très simple permettrait d'éliminer toute ambiguïté résultant d'une pluralité d'états singuliers.

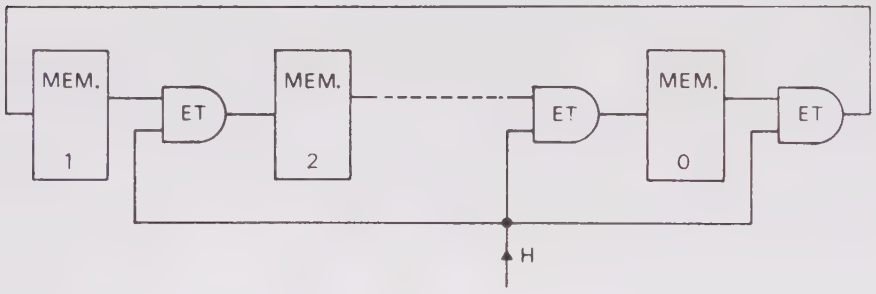


Figure II-1 Compteur en anneau

Une mémoire synchrone (RSH) peut être constituée d'une mémoire set-reset classique précédée d'une porte ET ; cependant l'emploi de portes mixtes associant la fonction ET à la fonction mémoire conduit à un temps de résolution minimal. C'est cette possibilité, offerte par les bascules rapides à diodes tunnel, que nous avons exploité dans le compteur en anneau, configuration qui permet, comme nous l'avons déjà montré, d'éliminer les inconvénients dus à leur asymétrie de fonctionnement. Il nous faudra toutefois leur adjoindre des circuits de remise à zéro car cette opération est dissociée de la mise à un dans ces mémoires synchrones particulières.

II-2 LE COMPTEUR EN ANNEAU A DIODES TUNNEL

Partant d'une bascule bistable à une diode tunnel, nous avons inclu la fonction ET à la fonction mémoire initiale par une polarisation adéquate de l'étage de façon que la simultanéité des si-

gnaux de commande appliqués sur deux entrées séparées, provoque sa commutation. L'une des entrées est connectée à l'étage précédent tandis que l'autre reçoit le signal d'horloge. Pour éviter une rétro-action de la mémoire sur celle qui la commande, inconvénient inhérent à la bidirectionnalité de l'élément, nous avons dû intercaler une diode backward dans la liaison entre étages.

Il en résulte la cellule de base du compteur, représentée sur la figure II.2 et dont on peut résumer le principe de fonctionnement en introduisant la notion de prépolarisation. Une diode tunnel de l'anneau polarisée en bistable, doit basculer et ne doit le faire sous l'influence d'un signal d'horloge que si elle est prépolarisée par l'étage précédent.

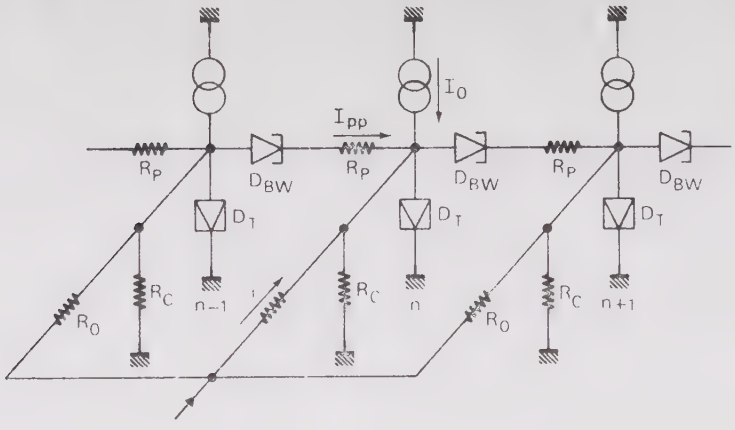


Figure II-2 Anneau de diodes tunnel

R_C simule l'impédance d'un circuit de charge quelconque placé sur chaque étage.

II-2-1 Fonctionnement d'un étage en régime statique

Le fonctionnement de la mémoire synchrone ainsi conçue est régi par quatre conditions implicites :

- Une diode tunnel polarisée à un courant I_0 et prépolarisée par un courant additionnel I_{pp}, doit basculer quand on lui applique une impulsion de commande i. Il faut pour cela que le courant qui tend à la traverser lorsqu'elle est dans son état de bas potentiel, soit supérieur au courant

de pic I_p :

$$I_o + I_{pp} + i > I_p$$

- Une diode tunnel non-prépolarisée ne doit pas basculer sous l'influence de l'impulsion de commande :

$$I_o + i < I_p$$

- Une diode tunnel prépolarisée ne doit pas basculer toute seule :

$$I_o + I_{pp} < I_p$$

- La diode tunnel doit être polarisée en bistable, c'est-à-dire que la courbe de charge doit couper la caractéristique dans la région de vallée.

$$I_D > I_v$$

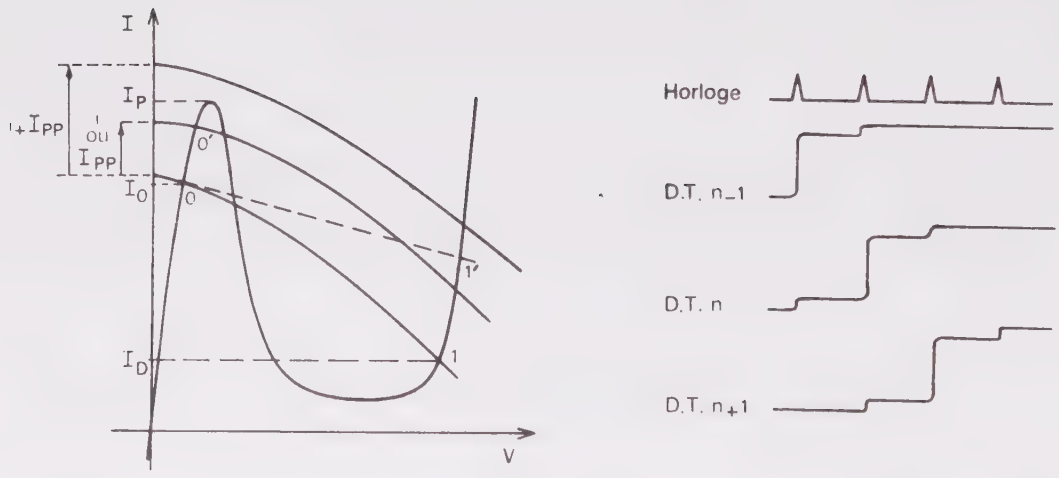


Figure II-3 Principe de la prépolarisation

La figure II.3.b qui représente les diagrammes des tensions aux bornes de trois étages consécutifs lorsqu'on applique des impulsions de commande à l'anneau, illustre le principe de la prépolarisation ; on y distingue quatre phases successives pour chaque diode tunnel :

- La diode tunnel est dans son état de bas potentiel de même que celle qui la précède ; le point de fonctionnement est en 0.

- La diode tunnel est dans son état de bas potentiel mais celle qui la précède étant montée, elle est prépolarisée ; le point de fonctionnement est en 0'.

- La diode tunnel est dans son état de haut potentiel et la diode suivante n'ayant pas encore basculé, elle la prépolarise ; le point de fonctionnement est en 1.

- L'étage suivant ayant basculé à son tour, la diode tunnel ne fournit plus de courant de prépolarisation ; le point de fonctionnement passe de 1 en 1'.

II-2-2 Fonctionnement d'un étage en régime dynamique

Le temps de résolution du compteur est déterminé par le temps de montée d'une bascule à diode tunnel et le temps de prépolarisation de la suivante, mais en pratique ce dernier est quasiment nul à cause du caractère capacitif de la diode backward qui assure le couplage entre étages. Il apparaît même dans la prépolarisation un dépassement dont il faut tenir compte dans les conditions de fonctionnement.

Le temps de montée d'un étage risque d'être altéré si la courbe de charge ne dépasse pas largement le pic lors du déclenchement, car il peut intervenir un léger retard plus ou moins aléatoire (ou "jitter") et le basculement ne sera pas franc. De même si l'on ne veut pas de commutation intempestive sous l'influence de parasites lorsque la diode tunnel est dans l'un de ses états stables, il ne faut pas que la courbe de charge coupe la caractéristique trop près du coude correspondant. L'immunité au bruit du circuit est liée à l'importance des marges de sécurité adoptées pour le fonctionnement.

L'impulsion doit être calibrée en temps et en amplitude pour satisfaire simultanément la condition imposée par la structure en anneau du compteur et celle propre à la fonction ET adjointe à la mémoire à diode tunnel. Pour une impulsion de forme théorique rectangulaire, une durée supérieure au temps de résolution du circuit provoquerait la commutation de plusieurs étages en cascade puisqu'il n'intervient pas de retard dans la prépolarisation ; par contre une largeur nettement inférieure peut altérer le temps de montée de chaque diode tunnel par suppression du signal de commande

avant la fin du basculement. Dans le cas pratique d'une impulsion de forme pseudotriangulaire, la largeur à la base peut être supérieure au temps de réponse des étages dans la mesure où chacun d'eux possède un seuil de déclenchement non nul.

Remarque : Cette dernière forme du signal de commande n'est pas incompatible avec le temps de résolution du compteur car il est toujours possible de décaler deux impulsions triangulaires d'un intervalle de temps égal à la moitié de leur largeur seulement sans que cela n'entraîne une augmentation d'amplitude du signal résultant.

Nous avons réalisé des bascules bistables ayant un temps de réponse inférieur à 200 ps avec des diodes tunnel de 10 mA de courant de pic et de temps de montée théorique 68 ps (diode Général Electric TD 253 B). Il y correspond une fréquence de comptage théorique :

$$F_{mo} = \frac{1}{t_r} = 5 \text{ GHz}$$

Il faut toutefois remarquer que l'étage du compteur ainsi conçu n'est pas complet. En effet, contrairement au registre à décalage classique, lorsqu'une mémoire est au niveau bas ("0") elle ne provoque pas la mise à zéro systématique de la suivante en présence de l'impulsion d'horloge. La bascule bistable à diode tunnel ne constitue en réalité une mémoire synchrone que pour le changement d'états "0"-"1" ; nous devons traiter la remise à zéro séparément et de façon différente.

II-3 REMISE A ZERO DU COMPTEUR

II-3-1 Incidence du circuit de remise à zéro sur les performances du compteur

Soit un compteur en anneau comprenant N étages à diode tunnel de temps de résolution t_r. Il présente une limite intrinsèque de la fréquence de comptage :

$$F_{mo} = \frac{1}{t_r}$$

La remise à zéro de chaque mémoire doit être assurée par des circuits annexes. Elle peut l'être dès lors que l'étage suivant a basculé et pendant que l'on continue à compter sur les (N-1) autres mémoires de l'anneau, solution qui nous permet de disposer du maximum de temps pour cette opération. Dans ce cas

pour atteindre effectivement la fréquence maximale F_{mo} du compteur, il faut que les circuits de remise à zéro aient un temps de réponse global t_{raz} tel que :

$$t_{raz} \leqslant T_{RAZ} = (N-1) \cdot tr$$

Cette condition peut toujours être réalisée, quelle que soit la rapidité des circuits, si l'on accepte de prendre un nombre d'étages :

$$N \geqslant 1 + \frac{t_{raz}}{t_r}$$

(En général N est égal à un multiple de 10 pour des raisons de simplicité de décodage).

Dans le cas contraire, lorsqu'on s'impose à la fois N et les circuits de remise à zéro dont le temps de réponse t_{raz} est donné, la fréquence maximale de comptage est limitée à la valeur :

$$F_m = \frac{N - 1}{t_{raz}}$$

Pour une décade par exemple, on doit avoir $t_{raz} \leqslant 9.t_r$ sinon il intervient une limite de la fréquence de comptage :

$$F_m = \frac{9}{t_{raz}} < F_{mo}$$

Comparaison entre les compteurs en anneau à transistors et à diodes tunnel

Le circuit de remise à zéro du compteur à diodes tunnel pourrait être conçu à partir d'une porte logique élémentaire (NAND) de temps de traversée θ. Son temps de réponse théorique serait alors :

$$t_{raz} = 2.\theta$$

et la fréquence maximale de comptage qui en résulterait :

$$F_m = \frac{N - 1}{2.\theta}$$

(sous réserve qu'elle soit inférieure à $F_{mo} = \frac{1}{t_r}$).

Si le compteur en anneau était constitué de mémoires synchrones à transistors réalisées dans la même technologie que les portes NAND, il présenterait dans les meilleures conditions une fréquence maximale de comptage :

$$F = \frac{1}{2.\theta}$$

Nous voyons par conséquent que l'utilisation de diodes tunnel permet d'améliorer les performances d'un compteur en anneau synchrone dans un rapport théorique (N-1), à condition que la fréquence de comptage résultante ne dépasse pas la valeur

$$F_{mo} = \frac{1}{t_r}$$

II-3-2 Problème de la remise à zéro-Cahier des charges

Chaque diode tunnel doit déclencher la remise à zéro de celle qui la précède. Nous pouvons utiliser pour cela, soit une porte NAND dont l'autre entrée reçoit des impulsions engendrées par ailleurs, soit un amplificateur inverseur. La conception du montage est la même dans les deux cas, seul diffère le principe de fonctionnement ; l'un est logique, l'autre analogique.

Quelle que soit la solution adoptée, le circuit de remise à zéro possède une impédance d'entrée capacitive, c'est pourquoi nous devons intercaler un séparateur pour ne pas augmenter le temps de réponse de la diode tunnel. Ce montage doit réaliser une séparation efficace en régime impulsionnel rapide sans introduire de retard excessif sur le signal utile ; aussi nous avons choisi un dispositif constitué d'une deuxième diode tunnel D_{TRAZ} polarisée en bistable et dont les états sont liés à ceux de la première par couplage résistif. Toute perturbation apportée au niveau de la diode secondaire n'a ainsi aucune répercussion sur l'étage principal. La polarisation et la remise à zéro sont communes aux deux diodes, comme l'indique le schéma de la figure II.4 ; il apparaît trois conditions de fonctionnement permettant de déterminer les valeurs des résistances R_1, R_{2A} et R_{2B} pour que les états des diodes soient identiques au repos et pendant les deux transitions complémentaires.

Le circuit de remise à zéro proprement dit doit répondre à certains impératifs que nous pouvons résumer sous la forme d'un cahier des charges :

- Il doit produire des impulsions de courant négatives à un niveau de tension pratiquement égal à celui de l'entrée.

- Il doit être suffisamment rapide pour ne pas limiter la fréquence maximale de comptage de l'anneau.

- Il ne doit comporter aucune liaison alternative puisqu'il est prévu pour fonctionner en régime apériodique.

- L'élément de sortie doit être bloqué au repos afin de ne pas modifier la polarisation de la diode tunnel principale.

- Le gain en courant équivalent de l'ensemble amplificateur diode D_{TRAZ} doit être supérieur à 10, valeur déterminée approximativement en comparant l'impulsion nécessaire pour remettre les diodes tunnel à zéro, à l'amplitude du courant que peut raisonnablement fournir la diode principale pour déclencher l'opération.

Remarque : Le temps de réponse que l'on doit considérer pour le circuit correspond à la période de récurrence minimale, c'est-à-dire qu'il faut y inclure le retard, la montée, le palier, la descente de l'impulsion de sortie et son temps de récupération.

II-3-3 Circuit de remise à zéro

Nous avons étudié de nombreux circuits de remise à zéro avant d'en choisir un qui soit suffisamment rapide pour envisager la conception d'une décade à diodes tunnel de temps de résolution inférieur à 1 ns.

Certaines solutions partielles du problème s'imposent d'elles-mêmes à la simple lecture du cahier des charges. C'est ainsi que l'élément de sortie bloqué au repos est nécessairement un transistor NPN si l'on excepte les diodes qui laissent passer un courant inverse appréciable lors du reblocage, phénomène inhérent à l'évacuation des charges emmagasinées dans la jonction. D'autre part, il est préférable que ce transistor de sortie soit utilisé dans un montage "base commune" pour réduire au minimum son temps de mise en conduction, auquel cas il doit être précédé d'un étage "émetteur commun" de façon à réaliser la fonction amplification de courant et inversion. En outre, les circuits d'entrée et de sortie étant pratiquement au même potentiel continu, il est logique de choisir le premier transistor de type PNP pour éviter tout décalage en tension et toute liaison alternative dans le montage.

Ces considérations nous ont conduit à mettre au point un amplificateur de type cascode complémentaire dont le schéma de principe est reproduit sur la figure II.4. Nous avons

essayé de nombreux montages de configuration différente mais celui-ci correspond au meilleur compromis entre la simplicité, la rapidité et la sécurité de fonctionnement.

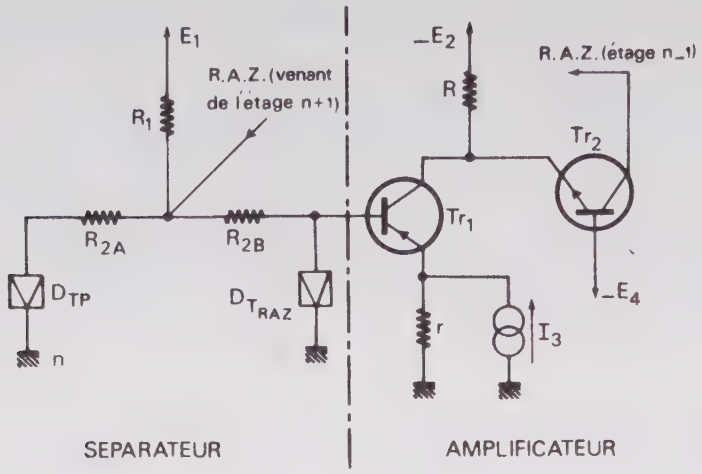


Figure II-4 Circuit de remise à zéro

Au repos, le transistor T_{r1}, polarisé par l'intermédiaire de I_3 et r, est suffisamment conducteur pour que T_{r2} soit bloqué. Lorsque la diode tunnel D_{TRAZ} bascule, T_{r1} tend vers le blocage permettant ainsi à T_{r2} de conduire le courant imposé par E_2 et R. Il y a commutation de courant au niveau de la résistance R. Le transistor T_{r1} ne doit pas se bloquer pendant la remise à zéro si l'on veut éviter un temps de récupération excessif de l'amplificateur.

L'introduction de ce circuit dans l'anneau de comptage nous conduit à insérer trois nouvelles conditions de fonctionnement ; l'une sur le gain en courant de l'amplificateur, les deux autres sur chacun de ses états.

Nous avons obtenu un temps de réponse voisin de 5 ns pour une impulsion de sortie de 10 mA, avec un montage réalisé à partir des transistors 2N 4260 pour T_{r1}, 2N 918 pour T_{r2} et d'une diode tunnel TD 715 pour D_{TRAZ}.

Remarque : Il faut s'attendre à une diminution de la rapidité des circuits de remise à zéro si l'on cherche à augmenter leur reproductibilité. C'est une perte de performances que l'on constate fréquemment lors du passage d'un montage de laboratoire à un prototype.

L'étude expérimentale de ce circuit nous a permis de faire apparaître un optimum en fonction du courant de pic des diodes tunnel. En effet des diodes de courant de pic élevé nécessitent une impulsion de remise à zéro de forte amplitude ce qui est préjudiciable au temps de réponse de l'amplificateur, tandis que pour de faibles valeurs du courant de pic, la diode tunnel secondaire chargée par le transistor présente un temps de montée excessivement long.

II-4 CELLULE DE BASE DU COMPTEUR

En définitive, nous avons adopté le schéma de principe de la figure II.5 pour un étage complet du compteur en anneau.

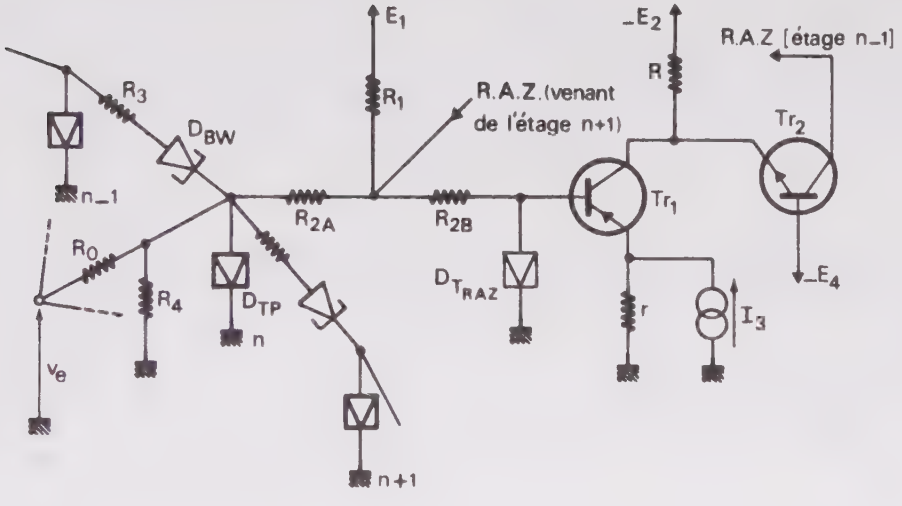


Figure II-5 Etage du compteur en anneau à diodes tunnel

Les circuits de remise à zéro décrits auparavant, présentent une réponse optimale pour des diodes principales de 10 mA de courant de pic et des diodes secondaires de 2 mA environ.

Si l'on choisit des diodes tunnel suffisamment rapides, il est possible de réaliser à partir de ce schéma de principe, une décade ayant une fréquence maximale de comptage supérieure à 1 GHz. La fabrication d'un tel montage avec une grande sécurité de fonctionnement exige toutefois une étude rigoureuse de circuit pour pallier les imperfections des diodes tunnel ; c'est pour cela qu'avant d'aborder la réalisation d'une décade, nous allons nous pencher sur le problème de l'optimalisation.

BIBLIOGRAPHIE DU CHAPITRE II

(1) H. DUGAS
Contribution à l'étude et l'utilisation des diodes à effet tunnel - Comptage apériodique à faible temps de résolution.
Thèse de Doctorat en Electronique - Bordeaux - Octobre 1964.

(2) H. DUGAS - G. LACROIX
Mémoire multistable à diodes tunnel, élément de base d'une décade apériodique à faible temps de résolution.
Colloque sur l'Electronique Nucléaire Rapide - Grenoble Février 1966 - L'Onde Electrique - vol. 46 - n° 472-473 - pp. 877-880 - Juillet-août 1966.

(3) B. LACOTTE
Etude et réalisation d'un compteur-décompteur à faible temps de résolution.
Thèse de Doctorat en Electronique - Bordeaux - Octobre 1967.

(4) G. LACROIX - F. POUZET - F. VALENTIN
Réalisation d'un registre rapide comptant et décomptant.
Colloque sur l'Electronique Nucléaire Rapide - Grenoble - Février 1966 - L'Onde Electrique vol. 46 - n° 472-473 - pp. 881-884 - Juillet-août 1966.

(5) G. LACROIX - G. MATHE
Décade à diodes tunnel - Méthode d'optimalisation du montage.
Colloque International sur la Microélectronique Avancée - Paris - Avril 1970.

(6) G. LACROIX
Comptage apériodique à très faible temps de résolution.
"Prospective" - Circuits Intégrés - A. D. E. R. A. - Bordeaux 1972.

(7) G. LACROIX
Amplificateur à large bande pour impulsions rapides.
C. R. Acad. Sc. Paris - t. 265 - pp. 346-348 - 7 août 1967.

(8) F. POUZET
Etude et réalisation d'un compteur-décompteur à faible temps de résolution.
Thèse de Doctorat en Electronique - Bordeaux-octobre 1966.

CHAPITRE III

OPTIMALISATION D'UN CIRCUIT ELECTRONIQUE
CONDITIONS DE FONCTIONNEMENT D'UN MONTAGE

Lorsqu'il étudie un montage, l'électronicien cherche en général à réaliser l'idéal qu'il s'est fixé ce qui l'amène à aborder, sciemment ou non, le problème de l'optimalisation. C'est un problème complexe car malheureusement les critères de perfection sont multiples et souvent incompatibles entre-eux, si bien qu'il est nécessaire de les pondérer en fonction de la finalité du montage.

Cette pondération, qu'il est quelquefois difficile d'introduire a priori, se réduit souvent, dans un premier temps, à l'élimination pure et simple de la majorité des critères au bénéfice d'une qualité jugée primordiale, quitte à en tenir compte par la suite et à choisir un compromis. C'est ainsi qu'au stade du laboratoire de recherche, dans la phase initiale d'élaboration du circuit, sont éliminés tous les problèmes de prix de revient, de rendement de fabrication, de fiabilité, etc ... ; ces questions sont du ressort des responsables de fabrication.

Les seuls critères de qualité retenus concernent uniquement le bon fonctionnement du montage et traduisent les soucis de l'électronicien à la recherche soit des performances maximales du circuit, soit de la sécurité de fonctionnement la plus grande possible. Ils dépendent essentiellement de la nature du montage et plus précisément de son but, c'est pourquoi ils s'expriment à partir des spécifications que l'on s'impose dans le cahier des charges.

L'optimalisation au stade de l'élaboration d'un montage consiste à déterminer le montage pour lequel le (ou les) paramètre(s) représentatif(s) de la qualité recherchée a sa (ont leur) valeur optimale.

III-1 DONNEES DU PROBLEME DE L'OPTIMALISATION

III-1-1 Cahier des charges

Il est constitué de l'ensemble des spécifications que l'on s'impose avant d'entreprendre l'étude d'un circuit. De sa formulation dépend la façon d'aborder l'optimalisation.

D'une manière générale, les différents montages peuvent être classés en deux catégories distinctes suivant le caractère de ces spécifications.

III-1-1-1 Spécifications à caractère analogique

Cette catégorie correspond à tout montage dont on souhaite que l'une au moins des caractéristiques externes soit extrémale.

C'est le cas par exemple, d'un amplificateur de bande passante donnée dont le gain doit être maximal (ou inversement), d'un amplificateur différentiel dont le taux de réjection doit être maximal et même celui d'un circuit logique dont on veut minimiser le temps de traversée, etc ...

Dans chaque cas le critère de l'optimalisation, que l'on appelle quelquefois fonction objectif, sera naturellement la grandeur à optimaliser en général fonction des différents paramètres du montage.

III-1-1-2 Spécifications à caractère logique

Il intervient dans cette catégorie, par opposition à la catégorie précédente, tout montage dont le cahier des charges présente un caractère logique, c'est-à-dire qui stipule que le montage en question sera jugé bon ou mauvais suivant que la fonction à réaliser sera satisfaite ou non.

Ce groupe comprend tous les circuits logiques d'une façon générale, mais aussi des circuits analogiques pour lesquels on fixe une condition minimale sur la caractéristique externe représentative de la fonction du montage. C'est par exemple le cas d'un amplificateur de bande passante donnée dont on désire que le gain soit supérieur à une limite.

Pour tous les circuits de cette catégorie, l'optimalisation portera essentiellement sur la sécurité de fonctionnement. Le critère choisi peut être la plage de température correspondant à une sécurité de fonctionnement élevée ou bien encore la dispersion tolérable sur l'un des paramètres.

La grandeur à optimaliser est ici un paramètre intrinsèque ou extrinsèque du montage.

III-1-2 Schéma de montage

Il ne peut être question d'entreprendre l'optimalisation mathématique d'un montage à partir du cahier des charges seul. Nous rencontrons là le problème de la synthèse des circuits qui, à part quelques cas particuliers, notamment en ce qui concerne les filtres, s'avère irréalisable pour le moment. L'ordinateur et le mathématicien ne peuvent se substituer à l'électronicien pour l'élaboration d'un circuit.

Un premier schéma de principe doit être établi au préalable ; sa détermination résulte généralement d'une étude expérimentale du montage.

Il est par contre tout-à-fait possible de modifier ce schéma de base à partir des résultats de l'étude d'optimalisation et de tendre ainsi par retouches successives, vers le schéma optimal.

III-1-3 Modèle mathématique

Nous écarterons volontairement l'optimalisation de circuits effectuée systématiquement de façon expérimentale bien que cette méthode soit encore très souvent utilisée dans les laboratoires ; elle est en effet plus proche du "bricolage" que d'une méthode scientifique. Elle consiste à faire varier successivement plusieurs paramètres du montage tels que certaines tensions d'alimentation ou certains éléments constitutifs et à noter chaque fois leur valeur optimale en fonction du résultat recherché. Pour peu que le montage soit complexe, il est impossible de faire dans ces conditions une étude rigoureuse et exhaustive du comportement du circuit.

L'optimalisation telle que nous l'envisageons est étudiée mathématiquement à partir des équations du circuit ; il est donc nécessaire de connaître un modèle mathématique correspondant au montage.

Ce modèle mathématique peut être choisi avec plus ou moins d'exactitude suivant la précision avec laquelle on désire réaliser l'optimalisation. Il y a lieu cependant d'introduire un compromis entre la rigueur de l'optimalisation et la complexité des calculs. C'est ainsi qu'il est quelquefois préférable de dissocier les considérations du régime statique de celles du régime dynamique faisant intervenir tous les éléments réactifs du montage. On traite alors séparément, mais l'une en fonction de l'autre, l'optimalisation du fonctionnement en statique et celle du fonctionnement en dynamique. Cette dernière peut d'ailleurs être réalisée expérimentalement lors de l'étude préliminaire du montage destinée à établir le schéma de principe, car, la plupart du temps, une étude qualitative suffit dans la mesure où il faut tenir compte de tous les éléments réactifs parasites, difficiles à évaluer et dont la majorité dépendent essentiellement de la réalisation pratique du

montage dans sa version définitive. Il peut en résulter des contraintes supplémentaires que l'on doit alors introduire dans l'optimalisation en régime statique.

III-1-4 Grandeurs caractéristiques du montage - Conditions de fonctionnement

L'optimalisation est conçue à partir des équations du circuit établies d'après le schéma de principe et le modèle mathématique correspondant.

Ces équations font généralement apparaître différentes grandeurs G_ℓ qui jouent un rôle prépondérant dans le fonctionnement du montage. Il peut s'agir soit de grandeurs physiques comme un courant ou une tension de polarisation caractérisant un état de repos ou encore une impulsion de commande, soit de caractéristiques externes telles que le gain d'un étage, un taux de réaction, etc ...

Les grandeurs G_ℓ sont choisies arbitrairement, mais l'ensemble qu'elles constituent, caractérise dans sa totalité le fonctionnement du montage.

Elles doivent satisfaire simultanément un certain nombre n de conditions exprimées sous forme d'inéquations et appelées conditions de fonctionnement, pour que le circuit réponde au cahier des charges imposé.

L'expression mathématique de ces conditions dépend évidemment de la nature du montage et du schéma de principe adopté.

III-1-5 Paramètres du montage

Les grandeurs caractéristiques G_ℓ précédentes s'expriment en fonction des éléments du circuit. Un montage est donc également défini par un nombre p de paramètres relatifs aux différents composants et aux caractéristiques apparentes des circuits qui lui sont obligatoirement associés en cours de fonctionnement comme les alimentations, les générateurs d'attaque, les circuits de charge etc ...

A ces p paramètres intrinsèques il faut ajouter m variables y_j caractéristiques de l'environnement dans lequel il est prévu de faire fonctionner le montage. Il s'agit de contraintes extérieures telles que la température, la pression, l'humidité, l'accélaration, etc ... La durée de fonctionnement peut également faire partie de ces variables extérieures ; elle permet alors de tenir compte du phénomène de vieillissement dans la mesure où l'on connaît son influence sur les caractéristiques des composants.

Les p paramètres que nous appellerons variables z_i ont une influence directe sur les valeurs nominales des grandeurs G_ℓ. Certains d'entre-eux sont fonction des m variables extrinsèques y_j caractéristiques du milieu ambiant.

Nous les noterons :

$$z_i(y_j)$$

Il intervient en outre des "données" qui n'affectent pas les valeurs nominales des grandeurs G_ℓ mais qui caractérisent néanmoins le fonctionnement du montage ; ce sont les coefficients de sécurité statiques ou dynamiques, les facteurs de dispersion des éléments ...

En résumé, un montage est défini mathématiquement par :

- m variables extrinsèques y_j
- p variables intrinsèques $z_i(y_j)$
- N "données" a_K
- L grandeurs caractéristiques G_ℓ
- n conditions de fonctionnement

III-2 EXPRESSION DES GRANDEURS CARACTERISTIQUES G_ℓ

Toutes les caractéristiques G_ℓ peuvent s'exprimer analytiquement en fonction des variables z_i.

Nous le noterons $G_\ell(z_i)$.

Cependant on ne connaît pas la valeur exacte de chaque variable z_i mais seulement leur valeur nominale dans un environnement donné.

III-2-1 Influence de l'environnement

Certains paramètres z_i dépendent d'une ou plusieurs variables extrinsèques y_j caractéristiques du milieu ambiant. Or un montage doit fonctionner pour différentes valeurs d'une variable y_j comprises dans une certaine plage P_j dont le choix détermine les conditions d'utilisation.

Cette plage P_j peut être définie par la valeur moyenne y_{oj} et par l'écart maximal Δy_j de y_j par rapport à y_{oj}.

$$y_{oj} - \Delta y_j \leqslant y_j \leqslant y_{oj} + \Delta y_j$$

Il apparaît les bornes de la plage

$$\begin{cases} y_{jmin} = y_{oj} - \Delta y_j \\ y_{jmax} = y_{oj} + \Delta y_j \end{cases}$$

Conformément à cette définition, nous exprimerons une variable y_j par l'intermédiaire de son écart algébrique δy_j avec la valeur moyenne y_{oj}.

(III-1) $$y_j = y_{oj} + \delta y_j$$

avec $$-\Delta y_j \leqslant \delta y_j \leqslant \Delta y_j$$

Remarque : Comme nous l'avons déjà précisé, le phénomène de vieillissement peut être considéré de la même façon que les contraintes extérieures dans la mesure où l'on connaît les lois de variations des paramètres dans le temps ; la durée de fonctionnement est alors assimilée à une variable extrinsèque y_j.

Soit un paramètre z_i fonction d'une ou plusieurs variables extrinsèques y_j et soit z_{oi} sa valeur correspondant à l'ensemble des valeurs moyennes y_{oj}.

(III-2) $$z_{oi} = z_i(y_{oj})$$

En développant en série de Taylor la fonction z_i autour du point z_{oi}, on peut écrire sous forme symbolique :

(III-3)

$$z_i(y_j) = z_i(y_{oj}) + \left| \left(\sum_j \left(\frac{\partial}{\partial y_j} \cdot \delta y_j \right) \right) \cdot z_i(y_j) \right|_{y_j = y_{oj}} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{r!} \left| \left(\sum_j \left(\frac{\partial}{\partial y_j} \cdot \delta y_j \right) \right)^r \cdot z_i(y_j) \right|_{y_j = y_{oj}} + R_r$$

r étant un nombre entier positif.

Cette relation n'a de sens que si la série considérée est convergente. En pratique, cette condition est toujours vérifiée dans la mesure où le paramètre en question ne présente pas de discontinuité sur la plage correspondant à l'ensemble des P_j, mais dans le cas contraire, le modèle mathématique choisi ne serait pas satisfaisant car il conduirait à une impossibilité physique.

L'expression III-3 peut se mettre sous la forme :

$$z_i(y_j) = z_{oi} \cdot \left[1 + \zeta_{oi}(\delta y_j) \right] \qquad \text{(III-4)}$$

avec $\zeta_{oi}(\delta y_j) \equiv 0$

si $\delta y_1 = \delta y_2 = \ldots = \delta y_j = \ldots = 0$

III-2-2 Incertitude sur les valeurs des paramètres z_i

Il n'est pas possible de connaître les valeurs exactes des variables z_i car cela nécessiterait la mesure systématique de tous les paramètres du montage et même dans ce cas, il faudrait introduire l'imprécision de la mesure qui entraîne une incertitude sur les valeurs trouvées. Seules les valeurs nominales z_{ni} sont connues.

La valeur vraie d'une variable z_i peut s'exprimer sous la forme :

$$z_i = z_{ni} + \delta z_i$$

ou encore :

$$z_i = z_{ni} \cdot (1 + \delta z_i / z_{ni})$$

δz_i étant l'écart algébrique que présente la variable z_i par rapport à sa valeur nominale z_{ni}.

En réalité, cet écart est inconnu mais il est faible en valeur relative et inférieur à une limite Δz_i que l'on peut généralement préciser :

$$|\delta z_i| \leqslant \Delta z_i$$

Lorsque les variables extrinsèques y_j caractéristiques de l'environnement sont égales à leur valeur moyenne, correspondant au milieu de chaque plage de fonctionnement, nous pouvons écrire :

$$z_{oi} = \left(1 + \frac{\delta z_i}{z_{noi}}\right) \cdot z_{noi} \qquad \text{(III-5)}$$

En combinant (III-4) et (III-5) on obtient l'expression de la valeur exacte de la variable z_i dans des conditions données d'utilisation :

$$(III\text{-}6) \qquad z_i = z_{noi} \cdot \left(1 + \zeta_{oi} \, (\delta y_j) \right) \cdot \left(1 + \frac{\delta z_i}{z_{noi}} \right)$$

Cette relation suppose que l'écart relatif d'un paramètre est indépendant des variables extrinsèques y_j et qu'inversement il n'affecte pas la fonction ζ_{oi}, hypothèses conduisant à une approximation du second ordre.

Cet écart relatif est propre à chaque élément constitutif du montage.

III-2-3 Grandeur caractéristique G_ℓ

Chaque grandeur caractéristique G_ℓ est une fonction des variables intrinsèques z_i.

z_i étant donné par (III-6) il est possible d'en déduire l'expression de G_ℓ en faisant intervenir deux développements en série de Taylor : le premier autour du point $z_{noi} \cdot (1 + \frac{\delta z_i}{z_{noi}})$ et le second autour de z_{noi}.

Il vient :

(III-7)

$$G_\ell(z_i) = G_\ell(z_{noi}) + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r!} \left(\sum_i \frac{\partial .}{\partial z_i} \cdot \frac{\delta z_i}{z_{noi}} \right)^r \cdot G_\ell(z_{noi})$$

$$+ \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r!} \left(\sum_i \frac{\partial}{\partial z_i} \cdot \zeta_{oi} \, (y_j) \right)^r \cdot G_\ell(z_{noi})$$

$$+ \left\{ \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r!} \left(\sum_i \frac{\partial}{\partial z_i} \cdot \zeta_{oi}(\delta y_j) \right)^r \right\} \left\{ \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r!} \left(\sum_i \frac{\partial}{\partial z_i} \cdot \frac{\delta z_i}{z_{noi}} \right) . G \, (z_{noi}) \right\}$$

Cette formule n'est valable que si elle conduit à un résultat, c'est-à-dire si les différentes séries qui la composent sont convergentes. En pratique cette hypothèse est vérifiée dans la

mesure où le modèle mathématique traduit avec précision les phénomènes physiques mis en jeu.

L'expression (III-7) signifie que l'on peut exprimer une quelconque grandeur caractéristique G_ℓ à partir de sa valeur nominale moyenne calculée à l'aide des valeurs nominales des différents paramètres pour les valeurs moyennes des variables extrinsèques et de trois termes correctifs : l'un introduit les écarts entre les valeurs vraies et les valeurs nominales des éléments, l'autre, l'influence des variables extérieures et le troisième, un mélange plus ou moins complexe des deux précédents mais qui est en général un terme du second ordre, nul par conséquent pour tout système linéaire.

On peut mettre (III-7) sous la forme :

(III-8)

$$G_\ell(z_i) = G_\ell(z_{noi}) + g_{\ell_1}(z_{noi}, \delta y_j) + g_{\ell_2}(z_{noi}, \frac{\delta z_i}{z_{noi}}) + g_{\ell_3}(z_{noi}, \delta y_j, \frac{\delta z_i}{z_{noi}})$$

Remarques : $\delta z_i / z_{noi}$ représente l'écart relatif d'un paramètre z_i par rapport à sa valeur nominale. Ce terme est inférieur à l'unité voire beaucoup plus petit dans la majorité des cas. Il est en effet exceptionnel de rencontrer un paramètre physique avec un écart relatif supérieur à l'unité car cela signifierait qu'il peut devenir négatif et il faudrait alors aborder le problème différemment en ce qui le concerne.

On peut donc négliger tous les termes de degré supérieur ou égal à 2 dans la quantité $g_{\ell_2}(z_{noi}, \delta z_i / z_{noi})$.

Il vient :

(III-9)
$$g_{\ell_2}(z_{noi}, \frac{\delta z_i}{z_{noi}}) = \sum_i \frac{\partial}{\partial z_i} G_\ell(z_{noi}) \cdot \frac{\delta z_i}{z_{noi}}$$

Cette approximation correspond à une linéarisation des fonctions autour des valeurs solutions, opération effectuée de façon courante parce que justifiée, dans tous les calculs d'erreur classiques utilisés pour l'étude des circuits.

La même approximation peut être faite pour la quantité g_{ℓ_3} ; nous obtenons alors :

(III-10)

$$g_{\ell_3}(z_{noi}\ ,\ \delta y_j\ ,\ \frac{\delta z_i}{z_{noi}}) = \sum_i \left[\frac{\partial}{\partial z_i} \left(\sum_i \frac{\partial}{\partial z_i} G_\ell(z_{noi}) \cdot \frac{\delta z_i}{z_{noi}} \right) \right] \cdot \zeta_{oi}\ (\delta y_j)$$

$$= \sum_i \left[\sum_i \frac{\partial^2}{\partial z_i^{\,2}} G_\ell(z_{noi}) \cdot \frac{\delta z_i}{z_{noi}} \right] \cdot \zeta_{oi}\ (\delta y_j)$$

En résumé une grandeur caractèristique G_ℓ peut s'écrire sous la forme :

(III-11)

$$G_\ell(z_i) = G_{\ell_o} + g_{\ell_1}(\delta y_j) + g_{\ell_2}(\frac{\delta z_i}{z_{noi}}) + g_{\ell_3}(\delta y_j\ ,\ \frac{\delta z_i}{z_{noi}})$$

Expression dans laquelle :

G_{ℓ_o} représente la valeur nominale de la grandeur caractéristique G_ℓ pour les valeurs moyennes des variables extrinsèques.

g_{ℓ_1}, fonction des paramètres z_{noi}, représente la correction à apporter à G_ℓ en fonction des éléments extérieurs.

g_{ℓ_2}, fonction des paramètres z_{noi}, représente l'écart de la grandeur G_ℓ par rapport à sa valeur nominale, dû à la dispersion sur les différents paramètres.

g_{ℓ_3} est un terme correctif qui dépend à la fois de δy_j, $\delta z_i/z_{noi}$ et z_{noi}. Il est très souvent négligeable.

III-3 CONDITIONS DE FONCTIONNEMENT

III-3-1 Expression des conditions de fonctionnement

Les conditions de fonctionnement auxquelles doit satisfaire le montage s'expriment sous forme d'inéquations en fonction des différentes grandeurs caractéristiques. Elles peuvent s'écrire :

$$\sum_{\ell} a_{\ell} \cdot G_{\ell} \leqslant K \qquad \text{avec } \ell = 1, 2, \ldots, L$$

a_{ℓ} étant un coefficient positif ou nul dépendant de la condition de fonctionnement envisagée.

K est une constante qui correspond soit à un coefficient de sécurité, soit à une limite qu'il est nécessaire d'introduire pour obtenir un bon fonctionnement du montage en statique ou en dynamique.

En tenant compte simultanément de toutes les conditions de fonctionnement nous obtenons un système de n inéquations de la forme générale :

$$\sum_{\ell} a_{q\ell} \cdot G_{\ell} \leqslant K_q$$

Soit, compte tenu de l'expression (III-11) :

(III-12)

$$\sum_{\ell} a_{q\ell} \cdot G_{\ell_0} + \sum_{\ell} a_{q\ell} \cdot g_{\ell_1}(\delta y_j) + \sum_{\ell} a_{q\ell} \cdot g_{\ell_2}\left(\frac{\delta z_i}{z_{noi}}\right) + \sum_{\ell} a_{q\ell} \cdot g_{\ell_3}\left(\delta y_j, \frac{\delta z_i}{z_{noi}}\right) \leqslant K_q$$

Cette inéquation peut s'écrire :

$$H_q(z_{noi}) + h_{q_1}(z_{noi}, \delta y_j) + h_{q2}\left(z_{noi}, \frac{\delta z_i}{z_{noi}}\right) + h_{q3}\left(z_{noi}, \delta y_j, \frac{\delta z_i}{z_{noi}}\right) \leqslant K_q$$

ou encore

(III-13) $$F_q(z_i) \leqslant 0 \qquad \text{avec} \qquad q = 1, \ldots, n$$

III-3-2 Méthodes de résolution

Ne connaissant pas les valeurs exactes des différents paramètres c'est-à-dire les quantités $\delta z_i/z_{noi}$, il est impossible de résoudre d'une façon rigoureuse le système d'inéquations précédent. Il existe néanmoins deux possibilités distinctes d'approfondir la connaissance du circuit en précisant davantage les conditions de fonctionnement, chacune d'elles faisant intervenir une donnée supplémentaire concernant la quantité $\delta z_i/z_{noi}$.

- Une première possibilité consiste à introduire la probabilité pour que la quantité $\delta z_i/z_{noi}$ ait une valeur donnée, probabilité que l'on peut connaître soit par détermination expérimentale sur un lot important de composants, soit par hypothèses établies d'après le mode de fabrication et plus ou moins vérifiées par le constructeur. Elle conduit à une méthode de calcul de type statistique qui consiste à préciser qu'elle est la probabilité générale pour que l'inéquation et par suite le système d'inéquations soient vérifiés. Cette étude dont il existe plusieurs méthodes de calcul, permet de déterminer plus particulièrement le rendement de fabrication voire la fiabilité du système.

- La deuxième possibilité fait appel à une autre donnée supplémentaire : la valeur maximale que peut prendre δz_i pour un élément donné. Cette valeur Δz_i est en général garantie par le constructeur ; elle provient soit du procédé de fabrication soit purement et simplement d'un tri préalable du composant. Certains utilisateurs n'hésitent pas d'ailleurs à faire subir des tests sévères aux composants avant de déterminer eux-mêmes les tolérances Δz_i.

L'étude de circuit est alors poursuivie en remplaçant dans toutes les inéquations la quantité :

$$\frac{\delta z_i}{z_{noi}} \quad \text{par} \quad \pm \frac{\Delta z_i}{z_{noi}}$$

de façon à englober tous les cas possibles et à obtenir un bon fonctionnement du montage même dans les pires conditions.

Il s'agit d'une méthode de calcul de type déterministe couramment appelée "méthode du cas le plus défavorable" (worst case design).

On peut d'ores et déjà prévoir qu'elle conduit à des résultats plus restrictifs car la probabilité pour que tous les éléments constitutifs d'un même montage aient simultanément les valeurs les plus défavorables est extrêmement faible. En réalité ces résultats sont rigoureux car si le système d'inéquations est vérifié, la probabilité de fonctionnement est égale à l'unité, en l'absence toutefois de défaillances cataleptiques ou de variations imprévisibles des éléments.

C'est pour cette raison que nous avons plus particulièrement étudié et mis au point une méthode d'optimalisation basée sur ce type de calculs, mais cependant différente de celles qui existent déjà à notre connaissance, tant dans le principe de résolution que dans les résultats qu'elle permet d'atteindre.

Avant d'aborder l'étude de cette méthode d'optimalisation, nous allons voir dans le chapitre suivant le principe de la plupart des méthodes actuellement utilisées, qu'elles soient de type statistique ou déterministe, leurs avantages et leurs inconvénients.

CHAPITRE IV

OPTIMALISATION DES CIRCUITS
METHODES CLASSIQUES

Les principales méthodes d'optimalisation généralement employées pour l'étude des circuits électroniques sont classées en deux catégories distinctes suivant leur nature (7) :

- Les méthodes de type déterministe
- Les méthodes de type statistique

Elles peuvent être utilisées, soit de façon expérimentale, soit de façon mathématique à l'aide de calculs analytiques ou numériques.

Nous allons décrire succinctement ces principales méthodes d'optimalisation afin de préciser leurs avantages, leurs inconvénients et leurs limites.

IV-1 LES METHODES DETERMINISTES

Le principe de ces méthodes consiste à calculer les valeurs extrémales des caractéristiques externes d'un montage, compte tenu des tolérances sur les différents paramètres des éléments constitutifs et à les comparer à des limites qu'il est nécessaire de respecter pour obtenir un fonctionnement correct.

IV-1-1 Classification des méthodes déterministes

Il existe trois méthodes de calcul différentes.

IV-1-1-1 Méthode d'addition des tolérances

C'est une méthode très grossière qui, si elle permet d'obtenir des résultats rapidement, ne donne cependant qu'une vague idée de la façon dont sont vérifiées les conditions de fonctionnement.

Elle consiste en un calcul approximatif des tolérances sur les différentes grandeurs caractéristiques G_ℓ fait par addition simple des tolérances sur chaque paramètre constitutif. Les résultats sont excessivement pessimistes car les tolérances ainsi déterminées sont majorées.

Ce procédé ne constitue qu'une approche de l'optimalisation car il ne permet pas de prévoir rigoureusement l'influence d'un paramètre donné sur le fonctionnement du montage.

IV-1-1-2 Méthode du développement limité

Les valeurs extrémales d'une grandeur donnée sont calculées à partir du développement limité au premier ordre de la fonction représentative autour du point moyen défini par les valeurs nominales des paramètres. Les différentielles dx_i de chaque variable sont remplacées par les incertitudes Δx_i affectées d'un signe dépendant de la polarité des dérivées partielles correspondantes.

La quantité :

$$dG_\ell = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} G_\ell(x_{01}, x_{02}, \cdots, x_{ON}) \cdot dx_i$$

est remplacée par

$$\Delta G_\ell = \sum_{i=1}^{N} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} G_\ell(x_{01}, x_{02}, \cdots, x_{ON}) \right| \cdot \Delta x_i$$

et permet de calculer

$$G_{\ell Max} = G_{\ell O} + \Delta G_\ell$$

$$G_{\ell min} = G_{\ell O} - \Delta G_\ell$$

Cette méthode de calcul est beaucoup plus précise que la précédente. Elle est très connue des physiciens et constitue ce que l'on appelle communément un calcul d'erreur classique.

IV-1-1-3 Méthodes du cas le plus défavorable

Elles consistent à faire les calculs en tenant compte des tolérances sur les différents paramètres et de leurs variations en fonction des contraintes extérieures de telle façon que l'on soit encore certain d'un fonctionnement correct du montage lorsque tous ces paramètres ont simultanément leurs valeurs extrémales les plus défavorables. Elles sont connues sous la dénomination anglaise : "worst case design" (1).

Il existe trois catégories de méthodes du cas le plus défavorable, différentes par les données introduites dans les calculs.

- Le "cas initial" où l'on ne tient compte que des tolérances de début de vie des paramètres.
- Le "cas absolu" où l'on considère les tolérances extrêmes des paramètres au cours du fonctionnement du montage dans des conditions d'utilisation données et pendant une durée déterminée.
- Le "cas de TAYLOR" où l'on introduit les tolérances de début de vie de tous les paramètres sauf un pour lequel on tient compte de sa tolérance extrême de fin de vie.

a) Le "cas initial"

C'est la méthode la moins rigoureuse des trois puisqu'elle ne tient pas compte de la variation des paramètres dans le temps ou en fonction de contraintes extérieures.

Elle est d'application facile mais elle ne conduit pas à une fiabilité élevée car la variation d'un seul paramètre prépondérant peut entraîner la panne du circuit étudié.

b) Le "cas absolu"

Comme nous l'avons déjà précisé, on considère dans cette méthode les tolérances extrêmes les plus défavorables des paramètres au cours du fonctionnement. Cependant, si l'on tient compte ainsi de l'évolution des paramètres dans le temps ou en fonction des contraintes extérieures, on le fait sans introduire leurs lois de variations.

Ce procédé de calcul permet donc de déterminer des circuits très fiables, surtout du point de vue vieillissement, mais il conduit à des résultats excessivement pessimistes.

c) Le "cas de TAYLOR"

Cette méthode constitue une solution intermédiaire car l'on tient compte à la fois des tolérances de début de vie des paramètres et de l'évolution de ces paramètres dans le temps ou en fonction de contraintes extérieures ; elle est donc plus rigoureuse et plus réaliste que toutes les précédentes. Nous verrons cependant par la suite qu'elle est difficilement applicable lorsque plusieurs paramètres ont une influence du même ordre de grandeur sur le fonctionnement du montage.

IV-1-2 Utilisation des méthodes du "cas le plus défavorable"

Ces méthodes d'optimalisation peuvent être utilisées soit de façon expérimentale, soit de façon analytique.

IV-1-2-1 Méthode expérimentale

Elle consiste à réaliser une maquette du circuit à optimaliser sur laquelle on peut faire varier tous les paramètres indépendamment les uns des autres afin de déterminer par approximations successives leurs valeurs les plus défavorables pour chacune des caractéristiques externes (5). On peut alors en déduire leur valeur nominale compte tenu de leurs tolérances.

Sa mise en oeuvre est assez complexe car en fait ce sont des combinaisons de valeurs défavorables qu'il faut rechercher, la variation d'un paramètre pouvant modifier les conclusions relatives aux autres. Une étude analytique sommaire, même qualitative, du fonctionnement permet toutefois de simplifier ce procédé.

IV-1-2-2 Méthode analytique

Elle repose sur la vérification des conditions de fonctionnement auxquelles doivent satisfaire les différentes caractéristiques externes du montage, conditions établies à partir d'un modèle mathématique dont la complexité dépend de la précision souhaitée dans la résolution.

L'optimalisation peut être abordée de deux façons distinctes :

- On détermine les valeurs extrêmales que peuvent prendre les différentes caractéristiques externes du montage compte tenu des tolérances sur les paramètres.

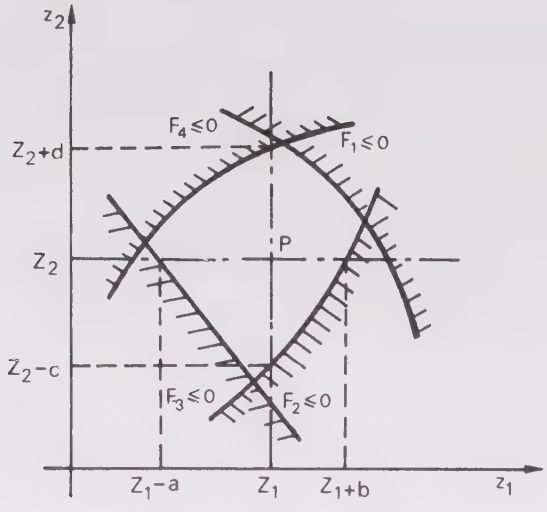
- On détermine les tolérances maximales admissibles sur les paramètres en fonction des limites qu'il est nécessaire d'imposer aux caractéristiques externes pour obtenir un fonctionnement correct du montage.

IV-1-2-3 Interprétation des résultats - Optimalisation

L'ensemble des conditions de fonctionnement exprimées sous forme d'inégalités en fonction des p paramètres du montage constitue un système d'inéquations dont la solution est un volume dans un espace à p dimensions.

Cet hypervolume ne peut être étudié que par l'intermédiaire de ses intersections par différents plans tels que celui représenté sur la figure IV-1.

Figure IV-1



En général, lorsqu'il existe, le volume solution est délimité par une surface fermée et tous les points représentatifs P situés à l'intérieur correspondent à des solutions possibles. Chaque paramètre considéré indépendamment des autres peut donc prendre une infinité de valeurs comprises dans une certaine plage, ce qui implique la possibilité d'admettre une tolérance sur celui-ci.

L'étude de circuits selon une méthode du cas le plus défavorable, permet d'envisager plusieurs principes d'optimalisation, c'est-à-dire de choix d'une solution parmi l'infinité de celles qui sont possibles.

Une première méthode d'optimalisation consiste à chercher la solution pour laquelle les tolérances admissibles sur les paramètres sont les plus grandes. Pour cela on recherche l'intersection de l'hypervolume par un plan qui donne l'aire minimale et l'on prend comme solution le point représentatif situé approximativement au centre du contour.

Cette méthode est connue sous le nom de contrôle marginal ("marginal checking"). Elle est d'application très simple lorsqu'on ne considère que deux paramètres mais elle se complique excessivement au fur et à mesure que le nombre de variables augmente et, dans ce cas, elle ne conduit pas directement à un véritable optimum. On peut inversement déterminer les tolérances admissibles sur les paramètres pour un montage donné par un ensemble de valeurs nominales.

Un autre principe d'optimalisation repose sur le choix, parmi l'infinité de solutions possibles, de celle qui conduit à l'optimum d'une grandeur donnée telle qu'une tension d'alimentation, une puissance consommée, une puissance de sortie ..., etc. cette grandeur devient le critère d'optimalisation du circuit.

Comme la première méthode décrite, celle-ci peut être réalisée graphiquement ; cependant, si la résolution en est très facile lorsqu'on ne considère que deux paramètres, elle devient rapidement inextricable quand le nombre de variables augmente. Elle est souvent adoptée pour l'étude de montages simples en particulier pour celle des modules logiques dont on veut optimaliser l'une des caractéristiques comme la puissance consommée, le fan-in ou le fan-out. (2) (10)

Les deux principes d'optimalisation précédents conduisent toutefois à des résolutions mathématiques totalement différentes lorsqu'ils sont appliqués de façon analytique.

L'utilisation des méthodes du cas le plus défavorable et les diverses possibilités d'optimalisation qui en découlent seront exposées plus en détail dans le chapitre suivant.

IV-2 METHODES STATISTIQUES

Les méthodes déterministes conduisent certes à une sécurité de fonctionnement totale mais elles donnent des résultats excessivement restrictifs et quelquefois pessimistes. La probabilité pour que toutes les conditions les plus défavorables soient réunies simultanément est en effet très faible, si bien que sont éliminés d'office un certain nombre de circuits présentant en réalité un taux de déchet infime. Il peut être intéressant de ne pas rejeter systématiquement ces montages, mais il est alors nécessaire de déter-

miner leur probabilité de fonctionnement pour s'assurer qu'elle est suffisante ; c'est ce que permettent de faire les méthodes statistiques à partir de la densité de probabilité de chaque paramètre.

Ces méthodes conduisent tout naturellement au calcul du rendement de fabrication, voire de la fiabilité du circuit dans la mesure où l'on introduit les variations des paramètres dans le temps. C'est un avantage certain qu'elles possèdent sur les méthodes déterministes mais elles présentent l'inconvénient de mener à des calculs relativement complexes lorsque le nombre de variables est important.

D'une manière générale, les méthodes statistiques reposent sur la détermination de la répartition d'une fonction G de plusieurs variables dont on suppose connues leurs densités de probabilité.

Plusieurs principes distincts permettent d'atteindre ce résultat.

- Soit on détermine la loi de distribution des grandeurs caractéristiques G_ℓ par un calcul direct.

- Soit on élabore un histogramme que l'on peut remplacer ensuite par une courbe théorique, image de la fonction de distribution recherchée.

- Soit on calcule, en s'appuyant sur quelques hypothèses simplificatrices, les paramètres fondamentaux d'une loi de distribution de type connu et pouvant constituer une bonne approximation.

Ces différentes méthodes peuvent être résolues de façon semi-expérimentale, analytique ou numérique.

Le calcul rigoureux de la probabilité de fonctionnement d'un circuit exige la connaissance exacte des lois de distribution des différents paramètres. En réalité cette condition n'est jamais remplie et l'on est obligé d'introduire certaines hypothèses de départ sur les lois de probabilité.

IV-2-1 Principales lois de probabilité - Rappels

IV-2-1-1 Terminologie (12)

IV-2-1-1-1 Cas d'une variable continue

La densité de probabilité d'une variable aléatoire X est la fonction f(x) telle que :

(IV-1) $$f(x).dx = Pr(x < X < x + dx)$$

Sa fonction de répartition ;

(IV-2) $$F(x) = Pr(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(s).ds$$

et le moment d'ordre n, la quantité :

(IV-3) $$< X^n > = \int_D x^n.f(x).dx$$

où D est le domaine de variation de x.

IV-2-1-1-2 Cas d'une variable discrète

La notion de densité de probabilité est remplacée par celle de fonction de fréquence f(x)

(IV-4) $$f(x) = Pr(X = x)$$

La fonction de distribution devient :

(IV-5) $$F(x_j) = Pr(X \leqslant x_j) = \sum_{i=1}^{j} f(x_i)$$

et le moment d'ordre n :

(IV-6) $$< X^n > = \sum x^n \ . \ f(x)$$ (somme étendue à toutes les valeurs de x)

IV-2-1-1-3 Principaux moments

- Le moment d'ordre 0 est égal à 1.
- Le moment d'ordre 1 est l'espérance mathématique de la variable X (ou valeur moyenne de X).

(IV-7) $$m = < X >$$

Soit la nouvelle variable aléatoire (X - m) appelée variable centrée. Elle a un moment d'ordre 1 nul. Son moment d'ordre 2 est appelé la variance μ_2.

(IV-8) $$\mu_2 = < (X-m)^2 >$$

On démontre que :

(IV-9) $$< X^2 > = \mu_2 + m^2$$

La racine carrée de la variance est l'écart type σ

(IV-10) $$\sigma = \sqrt{\mu_2}$$

On introduit également la variable réduite égale à $\frac{X-m}{\sigma}$.

Les principales lois de probabilité peuvent être définies à partir de ces paramètres.

IV-2-1-2 Lois de probabilité d'une variable aléatoire discrète

IV-2-1-2-1 Distribution de Bernouilli ou loi binômiale

Une variable aléatoire discrète X pouvant prendre les n+1 valeurs entières 0, 1, 2 ..., n possède une distribution de Bernouilli si sa fonction fréquence est de la forme :

(IV-11) $$f(x) = Pr(X=x) = C_n^x . p^x . q^{n-x} \qquad \text{avec } p + q = 1$$

$C_n^x = \frac{n!}{x!(n-x)!}$ étant le coefficient binômial.

La probabilité Pr(X=x) est égale au coefficient du terme en λ^x dans le développement de $(p\lambda + q)^n$ par la formule du binôme.

La moyenne et l'écart type de la variable sont respectivement :

$$m = np$$
$$\sigma = \sqrt{np}$$

IV-2-1-2-2 Distribution de Poisson

Une variable aléatoire discrète pouvant prendre toutes les valeurs entières non négatives, obéit à la loi de Poisson si sa fonction fréquence a pour expression :

(IV-12) $$f(x) = e^{-a} . \frac{a^x}{x!} \qquad a \text{ étant un nombre positif}$$

La moyenne et l'écart type sont respectivement :

$$m = a$$

$$\sigma = \sqrt{a}$$

IV-2-1-3 Lois de probabilité d'une variable aléatoire continue

IV-2-1-3-1 Distribution exponentielle

Une variable aléatoire continue X pouvant prendre toutes les valeurs positives, a une distribution exponentielle si sa densité de probabilité est de la forme :

(IV-13) $$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$ λ étant un paramètre positif.

Sa fonction de répartition vaut :

(IV-14) $$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

sa moyenne :

$$m = \frac{1}{\lambda}$$

son écart type :

$$\sigma = \frac{1}{\lambda}$$

IV-2-1-3-2 Distribution uniforme ou rectangulaire

Une variable aléatoire continue X est uniformément répartie ou distribuée dans l'intervalle (a, b) si elle présente une densité de probabilité :

(IV-15) $$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < a \text{ et } x > b \\ \frac{1}{b-a} & \text{pour } x \in (a,b) \\ \text{indéfinie} & \text{pour } x = a \text{ et } x = b \end{cases}$$

Sa fonction de répartition vaut :

(IV-16) $$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \leqslant a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{pour } x \in (a,b) \\ 1 & \text{pour } x \geqslant b \end{cases}$$

Sa moyenne :

$$m = \frac{a+b}{2}$$

son écart type :

$$\sigma = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$

IV-2-1-3-3 Distribution normale ou de Laplace-Gauss

Elle est définie par la densité de probabilité

(IV-17) $$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2 \right]$$

m est sa valeur moyenne, σ son écart type.

Si l'on introduit la variable réduite

$$u = \frac{X-m}{\sigma}$$

il vient :

(IV-18) $$f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{u^2}{2}}$$

La densité de probabilité f(u) et la fonction de répartition F(u) sont données par des tables.

IV-2-1-3-4 Distribution Log Normale

Une variable aléatoire continue X supérieure à un nombre réel positif a, obéit à une loi de distribution Log Normale si la variable aléatoire $\text{Log}_e(X-a)$ est normalement distribuée.

Si l'on pose :

$$m' = < \text{Log}(X-a) >$$

et $$\mu'_2 = < \left[\text{Log}(X-a)\right]^2 >$$

il vient :

(IV-19) $$m = a + \exp\left(m' + \frac{\mu'_2}{2}\right)$$

(IV-20) $$\mu_2 = \exp\left[2(m' + \mu'_2)\right] - \exp\left[2m' + \mu'_2\right]$$

IV-2-1-3-5 Distribution gamma

Elle est définie, pour une variable aléatoire continue X, par la densité de probabilité :

$$(IV\text{-}21) \qquad f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x}.x^{m-1}}{\Gamma(m)} & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{pour } x \leqslant 0 \end{cases}$$

$\Gamma(m)$ est une fonction de la forme :

$$(IV\text{-}22) \qquad \Gamma(p) = \int_0^{\infty} e^{-x}.x^{m-1}.dx \qquad (p > 0)$$

Lorsque p est entier

$$\Gamma(m + 1) = m!$$

Sa moyenne est égale à m, son écart type à $\sqrt{m}$

IV-2-1-3-6 Distribution du Khi-deux (ou loi de Pearson)

Cette distribution est celle de la somme des carrés de n variables normales réduites indépendantes.

La variable aléatoire $\chi^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_n^2$, ainsi obtenue, a une densité de probabilité.

$$(IV\text{-}23) \qquad f(\chi^2, n) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{n/2} \cdot \Gamma(\frac{n}{2})} \cdot e^{-x/2} \cdot x^{(n/2-1)} & \text{pour } \chi^2 > 0 \\ 0 & \text{pour } \chi^2 \leqslant 0 \end{cases}$$

une moyenne $m = n$

un écart type $\sigma = \sqrt{2n}$

n est appelé le nombre de degrés de liberté de la distribution.

IV-2-1-4 Distribution tronquée (3)

C'est celle que l'on obtient à partir d'une distribution primaire quelconque en éliminant les variables de valeurs extérieures à un intervalle donné. On rencontre souvent ce cas en pratique, chaque fois que l'on écarte par un tri préalable les variables trop éloignées de la valeur moyenne.

Soit (a,b) l'intervalle résultant.

Si f(x) et F(x) sont respectivement, la densité de probabilité et la fonction de répartition correspondant à la distribution primaire, celles de la distribution tronquée seront :

$$f(x \mid a < X \leqslant b) = \frac{f(x)}{\int_a^b f(s).ds} \qquad \text{(IV-24)}$$

$$F(x \mid a < X \leqslant b) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \leqslant a \\ \dfrac{F(x) - F(a)}{F(b) - F(a)} & \text{pour } a < x \leqslant b \\ 1 & \text{pour } x > b \end{cases} \qquad \text{(IV-25)}$$

IV-2-2 Calcul direct de la distribution d'une fonction

IV-2-2-1 Calcul analytique

Soit une grandeur G fonction de n variables X_i ($i = 1, 2, \ldots, n$)

$$G \equiv G(X_1, X_2, \ldots, X_n) \qquad \text{(IV-26)}$$

Les variables X_i peuvent être considérées comme les composantes d'un vecteur aléatoire X à n dimensions.

La connaissance de la fonction de répartition de ce vecteur,

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = Pr(X_1 < x_1, X_2 < x_2, \ldots, X_n < x_n) \qquad \text{(IV-27)}$$

permet de déterminer la fonction de répartition de la grandeur G (9).

En effet :

$$Pr\big(G(X_1, .., X_n) < g\big) = \int \ldots\ldots \int_{G(x_1, \ldots, x_n) < g} dF(x_1, x_2, .., x_n) \qquad \text{(IV-28)}$$

Dans le cas général où les variables aléatoires sont quelconques, le calcul analytique de cette probabilité devient rapidement complexe au fur et à mesure que n augmente. Cependant, lorsque les variables sont indépendantes, la densité de probabilité du vecteur aléatoire X,

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_1 \cdot \partial x_2 \ldots \partial x_n}$$

peut s'exprimer sous la forme simplifiée :

(IV-29) $$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{k=1}^{n} p_k(x_k)$$

où $p_k(x_k)$ est la densité de probabilité de la variable X_k.

La fonction de répartition de G peut alors s'écrire :

(IV-30) $$F(g) = \Pr\left(G(X_1, X_2, \ldots, X_n) < g\right) = \int \ldots\ldots \int_{G(x_1, x_2, \ldots, x_n) < g} \prod_{k=1}^{n} \left(p_k(x_k).dx_k\right)$$

Expression de la densité de probabilité

g est une fonction de x_i

(IV-31) $$g = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

De l'expression de g on peut tirer par exemple

$$x_n = h_n(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, g)$$

et par suite

$$dx_n = h'_{ng}.dg$$

On en déduit par conséquent, une expression de la densité de probabilité de G.

(IV-32)

$$p(g) = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty}}_{n-1} p_1(x_1).p_2(x_2)\ldots p_n\left(h_n(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, g)\right).h'_{ng}.dx_1 \ldots dx_{n-1}$$

Dans le cas particulier où la grandeur G est une somme de variables aléatoires indépendantes, on obtient pour la densité de probabilité, le produit de convolution de celles des différentes variables.

IV-2-2-2 Utilisation des transformées intégrales

Lorsque le nombre n de variables x_i est grand, le calcul précédent devient rapidement inextricable.

Il est possible de le simplifier, dans une certaine mesure, en introduisant une fonction caractéristique $\varphi(t)$ liée à la densité de probabilité f(x) de la grandeur. [3] [9].

Cette fonction $\varphi(t)$ est définie comme l'espérance mathématique de la quantité e^{jXt}

$$\varphi_X(t) = < e^{jXt} >$$

soit :

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x).\ e^{jxt}.dx \qquad \text{(IV-33)}$$

La fonction caractéristique $\varphi(t)$ est la transformée de Fourier de la densité de probabilité f(x). Il existe donc une analogie entre ces fonctions d'une part et les intégrales de Fourier ou celles de Laplace et Mellin, d'autre part ; les théorèmes généraux sont les mêmes et il est possible d'utiliser, pour faire les calculs, les résultats déjà obtenus et répertoriés dans des tables de transformations.

Notons cependant que lorsque le nombre de variables est important, même l'utilisation de la fonction caractéristique ne conduit pas toujours à une résolution simple.

IV-2-3 Elaboration d'un histogramme ou détermination numérique de la distribution d'une fonction

IV-2-3-1 Calcul numérique de la distribution - Composition numérique

La fonction de répartition définie précédemment peut être déterminée numériquement. Il s'agit du calcul classique par ordinateur d'une intégrale définie dans un hyperespace.

Physiquement, chacun des paramètres X_i peut prendre une infinité dénombrable de valeurs telles que :

$$a_i \leqslant X_i \leqslant b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

Leur densité de probabilité est connue dans l'intervalle correspondant. On l'échantillonne de façon à transformer les distributions continues en distributions discrètes. Il suffit pour cela de diviser le domaine (a_i, b_i) en un nombre k d'intervalles égaux de largeur :

$$x_i = \frac{b_i - a_i}{k}$$

et de prendre dans l'intervalle de rang j délimité par les valeurs $(x_{i,j}, x_{i,j+1})$ la densité de probabilité constante et égale à $p_i(x_{i,j})$

$$p_{i,j} = p_i(x_{i,j}) \qquad \text{avec } j = 1, 2, \ldots, k$$

Il existe en réalité (k + 1) intervalles.

Soit P_{ij} la probabilité pour que le paramètre X_i soit compris dans l'intervalle $(x_{i,j}, x_{i,j+1})$ que l'on peut référencer par le couple de valeurs $(x_{i,j}, \Delta x_i)$

$$P_{i,j} = p_{i,j} \cdot \Delta x_i$$

Considérons tous les paramètres, chacun d'eux étant pris sur un intervalle quelconque ;

$$X_1 \in (x_{1\ell} \ , \ \Delta x_1)$$

$$X_2 \in (x_{2m} \ , \ \Delta x_2)$$

$$X_i \in (x_{ij} \ , \ \Delta x_i)$$

$$X_n \in (x_{nq} \ , \ \Delta x_n)$$

La grandeur $G(X_{1\ell}, X_{2m}, \ldots, X_{ij}, \ldots, X_{nq})$ sera comprise dans un intervalle ΔG_α contenant la valeur :

(IV-34) $$G_\alpha = G(X_{1\ell}, X_{2m}, \ldots, X_{ij}, \ldots, X_{nq})$$

La probabilité pour que l'on rencontre cet évènement est :

(IV-35) $$P_\alpha = P_{1\ell} \cdot P_{2m} \cdots P_{ij} \cdots P_{nq}$$

Supposons la grandeur G équirépartie dans l'intervalle ΔG_α. Comme il existe n fois (k+1) intervalles pouvant se grouper en $(k+1)^n$ combinaisons, nous trouverons $(k+1)^n$ segments ΔG_α correspondant à des probabilités P_α, différentes à priori. Ces segments de probabilités constantes seront répartis un peu partout à l'intérieur de l'intervalle délimité par les valeurs extrémales G_{min} et G_{max} de la grandeur G. Il est alors possible d'obtenir, par addition, l'histogramme des fréquences et par intégration, la fonction de répartition de la grandeur G (sous forme quantifiée). Ceci est également réalisable numériquement en découpant l'intervalle (G_{min}, G_{max}) en h parties de même étendue :

$$\frac{G_{max} - G_{min}}{h}$$

La précision de cette méthode de calcul dépend essentiellement des nombres k et h d'intervalles utilisés successivement.

IV-2-3-2 Méthode de MONTE CARLO

IV-2-3-2-1 Résolution expérimentale : Méthode de l'échantillonnage.

Cette méthode est réalisée à partir d'une maquette du circuit sur laquelle on peut modifier chaque paramètre indépendamment des autres. Elle consiste à attribuer aux différents paramètres des valeurs prises au hasard en fonction de leur loi de répartition respective et à mesurer les caractéristiques externes du montage qui en résultent. En répétant l'opération un très grand nombre de fois, il est possible de tracer pour chaque grandeur, un histogramme des fréquences, image de la loi de distribution.

La résolution expérimentale est excessivement longue ; on ne peut l'envisager que pour l'étude de montages simples et à condition d'adopter un processus de mesure semi-automatique avec système de commutation (4).

IV-2-3-2-2 Résolution numérique

La détermination de l'histogramme d'une grandeur caractéristique peut être réalisée numériquement à l'aide d'un calculateur. Il suffit pour cela, de résoudre un grand nombre de fois les équations du circuit déduites du modèle mathématique, de façon à calculer les caractéristiques externes du montage pour différentes valeurs des paramètres fournies par des générateurs de nombres aléatoires simulant leurs lois de distribution respectives.

La précision obtenue ainsi est d'autant plus grande que le nombre de calculs élémentaires est élevé ; ceci explique la nécessité de disposer d'un calculateur performant.

La méthode de MONTE-CARLO permet de déterminer directement la probabilité de fonctionnement d'un circuit par simulation mais, comme toutes les méthodes numériques, elle n'autorise aucune analyse des résultats et par suite, aucune optimalisation, si ce n'est par itération. Elle ne présente un intérêt que pour le calcul de la fiabilité ou du rendement de fabrication d'un circuit déjà déterminé par une optimalisation préalable.

Remarque : L'une des applications de la méthode de MONTE-CARLO réside dans l'évaluation d'intégrales multiples d'ordre élevé (8).

IV-2-4 Détermination de la fonction de distribution d'une grandeur à partir d'un histogramme - Méthodes d'ajustage à une loi connue.

Il s'agit de déduire une fonction de distribution théorique à partir d'un histogramme déterminé expérimentalement ou numériquement. On se propose pour cela de calculer les différents paramètres définissant une loi de probabilité connue dont la nature est suggérée par la forme de l'histogramme de départ.

IV-2-4-1 Méthode des moments

Elle consiste à identifier un nombre suffisant de moments tirés de la distribution discrète connue, à ceux de la distribution théorique (3). Comme ces moments sont fonction des paramètres recherchés, il suffit d'écrire autant d'équations qu'il y a d'inconnues.

Cette méthode conduit à des calculs simples mais elle ne permet pas, sauf dans certains cas particuliers, d'obtenir la meilleure évaluation des paramètres.

IV-2-4-2 Méthode du maximum de vraisemblance (3)

Un histogramme permet d'effectuer le dénombrement d'une population donnée, c'est-à-dire, dans le cas présent, de répertorier k valeurs g_i prises par la grandeur G considérée.

Soit $f(g, \alpha_1\ \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ la densité de probabilité suggérée par l'histogramme. Elle est définie par n paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$.

Si elle est exacte, la probabilité pour trouver une valeur discrète g_i de la grandeur G est $f(g_i, \alpha_1 \ldots \alpha_n)$ et la probabilité pour trouver l'ensemble des valeurs discrètes constituant l'échantillon considéré est le produit :

$$L(g_1, g_2, .., g_k, \alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n) = f(g_1, \alpha_1, .., \alpha_n).f(g_2, \alpha_1, .., \alpha_n) \ldots$$

$$.. f(g_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

Cette fonction est appelée fonction de vraisemblance (Likelihood function).

La méthode du maximum de vraisemblance consiste à donner aux paramètres α_i les valeurs qui rendent L maximale.

Il suffit pour cela d'annuler les dérivées partielles :

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha_1}, \quad \frac{\partial L}{\partial \alpha_2} \ldots, \quad \frac{\partial L}{\partial \alpha_n}$$

et comme L est un produit de fonctions, on utilise généralement les dérivées logarithmiques.

La résolution du système d'équations $\frac{\partial \mathrm{Log}L}{\partial \alpha_i} = 0$ permet de calculer chaque paramètre α_i de la distribution.

Remarques :

- Il existe d'autres méthodes d'ajustage qui correspondent à des cas particuliers.
- Une fois la distribution théorique définie il peut être intéressant de vérifier si elle correspond bien à l'histogramme étudié. Le test du χ^2 est une méthode de comparaison qui permet de le faire.

IV-2-5 Recherche d'une forme approchée de la distribution d'une fonction

Lorsque le nombre de variables est élevé, la détermination directe de la distribution conduit à des calculs inextricables et l'élaboration d'un histogramme est une opération longue qui nécessite une quantité importante de calculs numériques. Il est souvent préférable d'employer des méthodes d'investigation plus ou moins empiriques et basées sur des approximations des différentes relations fonctionnelles du circuit.

IV-2-5-1 Méthode de la régression multiple - Méthode des moindres carrés (6) (7)

Soit une grandeur caractéristique G. Lorsque la relation fonctionnelle correspondant à G est inconnue ou présente une forme complexe et si l'on connaît un nombre m de valeurs particulières G_j de la grandeur G, obtenues expérimentalement pour différentes valeurs x_{ij} des variables x_i, il est possible de déterminer par une analyse de régression, les différents paramètres d'une fonction simple $G'(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ réalisant une approximation de la fonction réelle. Sa forme analytique est choisie de façon plus ou moins arbitraire, à la suite, soit d'une étude mathématique élémentaire, soit d'une étude expérimentale. Elle fait intervenir différents paramètres $a_o, a_1, .., a_p$ que l'on peut estimer à partir des valeurs particulières G_j par la méthode du maximum de vraisemblance.

Si les distributions des différentes grandeurs sont supposées normales, on montre que la méthode précédente conduit à choisir les paramètres a_k qui rendent minimale la quantité :

$$M = \sum_{j=1}^{m} \frac{(G_j - G'_j)^2}{\sigma_{G_j}} \qquad \text{(IV-36)}$$

Il suffit pour cela d'annuler les dérivés partielles de M par rapport à chacun des paramètres.

C'est la méthode des moindres carrés. Lorsqu'on l'utilise, on prend généralement pour la grandeur caractéristique G' une relation de la forme :

$$G' = a_o + \sum_{k=1}^{n} a_k . f_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad \text{(IV-37)}$$

et l'on construit m circuits différents pour lesquels on mesure les valeurs de chaque x_i et celles de G correspondantes.

Une fois cette relation fonctionnelle déterminée, il reste à en déduire la moyenne et la variance de G. Ces approximations ont pour but de simplifier les relations fonctionnelles et par suite l'analyse statistique effectuée suivant l'une des méthodes précédentes.

IV-2-5-2 Méthode de propagation des erreurs

Comme son nom l'indique, la méthode est issue de la théorie des erreurs employée en métrologie (11) ; elle repose sur le théorème de la limite centrale (3).

Quelle que soit la distribution des variables aléatoires indépendantes $X_1, X_2, \ldots, X_n$, la somme

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

admet une distribution qui tend asympotiquement, lorsque n croît, vers la loi normale dont la moyenne et la variance sont les sommes respectivement des moyennes et des variances de chaque variable.

(IV-38) $$m = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

(IV-39) $$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2$$

Soit $G(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ une fonction d'un grand nombre n de variables aléatoires, admettant des dérivées continues du premier et du second ordre autour du point moyen m de coordonnées $m_1, m_2, \ldots, m_n$. On peut la développer en série de Taylor (limitée au terme du 1er ordre)

il vient :

(IV-40) $$G(X_1, X_2, \ldots, X_n) = G(m_1, m_2, \ldots, m_n) + \sum_{i=1}^{n} \delta_i (X_i - m_i) + \ldots$$

avec $$\delta_i = \left(\frac{\partial G}{\partial X_i} \right)_{X_i = m_i}$$

Le premier terme de l'expression (IV-40) est une constante tandis que le second est égal à la somme de n variables aléatoires indépendantes et de moyenne nulle.

Le théorème de la limite centrale appliquée à la fonction linéarisée :

$$(IV\text{-}41) \qquad G(X_1, X_2, \ldots, X_n) - G(m_1, m_2, \ldots, m_n) = \sum_{i=1}^{n} \delta_i \, (X_i - m_i)$$

permet de conclure que la distribution de la fonction $G(X_1, X_2, .., X_n)$ est approximativement une distribution normale de moyenne :

$$(IV\text{-}42) \qquad m_g = < G(X_1, X_2, \ldots, X_n) > = G(m_1, m_2, \ldots, m_n)$$

et d'écart type :

$$\sigma_g^2 = < \left[G(X_1, X_2, \ldots, X_n) - G(m_1, m_2, \ldots, m_n) \right]^2 >$$

$$\sigma_g^2 = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial G}{\partial X_i} \right|^2_{X_i = m_i} \cdot \sigma_i^2$$

Il suffit donc de connaître la valeur nominale d'une grandeur G et les valeurs numériques de ses dérivées partielles $\frac{\partial G}{\partial X_i}$ par rapport à chaque variable, lorsque ces dernières présentent leurs valeurs nominales, pour en déduire les paramètres de sa loi de distribution supposée normale.

Cette méthode de calcul donne de bons résultats lorsque les variables aléatoires sont indépendantes. Dans le cas contraire, on montre que la variance a pour expression :

$$(IV\text{-}44) \qquad \sigma^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \delta_i \cdot \delta_j \cdot < (X_i - m_i) \cdot (X_j - m_j) >$$

Soit :

$$(IV\text{-}45) \qquad \sigma^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \delta_i \cdot \delta_j \; \rho_{ij} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_j$$

où ρ_{ij} est le coefficient de corrélation entre les variables X_i et X_j.

Remarques :

- Si $i = j$ $\qquad \rho_{ij} = 1$

- Si les variables sont indépendantes :

$$\rho_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{pour } i \neq j \\ 1 & \text{pour } i = j \end{cases}$$

et

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 \cdot \sigma_i^2 \qquad \text{(IV-46)}$$

La méthode de propagation des erreurs peut être résolue analytiquement ou de façon semi-expérimentale. Dans ce dernier cas les dérivées partielles nécessaires au calcul de l'écart type d'une caractéristique externe G_ℓ sont déterminées expérimentalement sur une maquette du circuit étudié. Il suffit pour cela, de mesurer les variations ΔG_ℓ de la grandeur considérée, produites par des variations Δx_i d'un paramètre autour de sa valeur nominale.

La dérivée partielle recherchée est égale à $\frac{\Delta G_\ell}{\Delta x_i}$.

Cette méthode de calcul statistique ne donne que des résultats approchés, mais elle permet de mettre en évidence le poids relatif de chaque variable dans l'incertitude résultante sur les caractéristiques externes d'un montage. Connaissant la sensibilité du circuit aux dispersions sur les différents paramètres, il est alors possible de la diminuer par un choix convenable des éléments constitutifs.

IV-3 CONCLUSION

Les méthodes d'optimalisation déterministes et statistiques sont en réalité complémentaires.

Les premières conviennent parfaitement à l'étude des circuits au stade du laboratoire ou lorsque la sécurité de fonctionnement prime toutes considérations de puissance consommée, de rendement, de prix de revient, etc. ... Elles donnent des résultats pessimistes mais en contrepartie elles conduisent à des montages qui

fonctionnent à coup sûr et surtout, elles permettent facilement de les comparer entre-eux, d'évaluer leurs qualités intrinsèques, de tirer des conclusions précises sur les paramètres et leurs tolérances acceptables, autrement dit, de faire toutes les opérations propres à l'optimalisation des circuits. Il faut noter toutefois qu'il est difficile sinon impossible de faire une optimalisation réelle avec les méthodes décrites précédemment, lorsque les montages ne sont pas simples. Parmi ces méthodes, le choix de l'une d'entre-elles dépend du montage à étudier, des moyens dont on dispose et de la précision recherchée dans l'optimalisation. La méthode expérimentale est vraisemblablement la plus employée de toutes mais elle ne constitue qu'une ébauche d'optimalisation dans la mesure où elle est abordée d'une manière superficielle.

Les méthodes statistiques sont utilisées de préférence dans les laboratoires de développement car elles servent principalement à calculer la fiabilité et le rendement de fabrication d'un circuit, caractéristiques qui n'intéressent avant tout que les responsables de fabrication. Là encore le choix de la méthode dépend du but recherché :

- Les méthodes de calcul direct sont les plus rigoureuses mais elles conduisent à des résolutions extrêmement complexes.

- Les méthodes numériques permettent l'élaboration directe d'un histogramme cependant elles nécessitent une quantité considérable de calculs, pour peu que le nombre de paramètres du montage soit élevé. Parmi celles-ci, la méthode de MONTE-CARLO est plus appropriée à l'évaluation précise de la fiabilité effectuée dans le cadre d'un contrôle final.

- Les méthodes approximatives comme la méthode de propagation des erreurs par exemple, ne conduisent qu'à des résultats approchés mais elles sont beaucoup plus simples à mettre en oeuvre et permettent d'aborder une analyse du montage indispensable à toute optimalisation.

BIBLIOGRAPHIE DU CHAPITRE IV

(1) W. D. ASHCRAFT

Design Worst-Case Analysis : A systematic Method to Approch Specified Reliability Requirements
I. R. E. Transactions, R Q C 3, pp. 15-21, Nov. 1961.

(2) W. BONGENAAR and N, C. de TROYE

Worst-Case considerations in Designing Logical Circuits.
I. E. E. E. Transactions, EC 14, pp. 590-599, Aug 1965.

(3) H. CRAMER

Mathematicals Methods of Statistic
Princeton University Press, 1963.

(4) F. ESCURE

Analyseur statistique
Automatique, Vol. XV - n° 6 - pp. 309-311 - juin 1970.

(5) G. P. KLEIN

Tester Simulates Worst - Case Power Supply Conditions.
Electronical Design News, Vol. 10 - n° 15 - pp. 75-78 - Dec. 1965.

(6) J. MARINI and R. WILLIAMS

Evalution and Prediction of circuit Performance by statistical Techniques.
I. R. E. Transactions R Q C 9 - pp. 40-52 - April 1960.

(7) J. C. RAULT

Les méthodes d'optimalisation des circuits électroniques.
L'Onde Electrique - Vol. 48 - n° 493 - pp. 293-303 - Avril 1968.

(8) A. RALSTON et H. S. WILF

Méthodes mathématiques pour calculateurs arithmétiques.
H. KAHN : Quadrature multiple par la méthode de MONTE-CARLO - Dunod 1965.

(9) A. RENYL

Calcul des probabilités.
Dunod 1966.

(10) J. P. SICOT

Etude élémentaire en statique de circuits
T. T. L. NI.
Rapport CSF n° 454 16 juin 1965.

(11) METHODS OF EXPERIMENTAL PHYSICS

Vol. 1 Classical Methodes. Ed. I. ESTRERMANN.
Academic Press - 1959.

(12) Terminologie dans le domaine des statistiques utilisées en fiabilité et en contrôle statistique de la qualité.
Terminologie proposée par un groupe de spécialistes du Centre de Fiabilité.

CHAPITRE V

METHODE D'OPTIMALISATION PROPOSEE

V-1 INTRODUCTION

Le but de cette étude réside dans l'optimalisation d'un circuit traitée en considérant la sécurité de fonctionnement comme critère. C'est en effet la caractéristique prépondérante d'un montage dès lors qu'on envisage son utilisation dans un environnement donné et il convient de la rendre maximale lorsqu'elle n'est pas très grande naturellement.

Parmi les méthodes classiques décrites dans le chapitre précédent, ce sont les méthodes déterministes les mieux appropriées à l'objectif que nous nous sommes fixé, du moins dans un premier temps, au stade de l'élaboration du circuit. Cependant, elles ne permettent pas, dans leur état actuel, d'effectuer directement une optimalisation réelle du montage. Nous verrons que cet inconvénient provient en partie de leur principe de résolution ; les inconnues principales comme certaines tensions de polarisation ou certains éléments du montage ne sont pas dissociées, dans le calcul, des "données" que représentent les paramètres des composants actifs utilisés, leur dispersion, etc. ...

Ce défaut nous a incité à reprendre complètement l'étude de l'optimalisation des circuits, ce que nous avons fait en nous appuyant sur le principe du cas le plus défavorable.

Après avoir introduit les données du problème, nous décrivons succinctement les processus généraux d'optimalisation utilisés en automatique, puis nous traitons le cas particulier d'un circuit électronique.

V-2 DONNEES DU PROBLEME

Nous avons déjà vu qu'un montage est caractérisé par son schéma de principe et un nombre p de paramètres relatifs aux composants utilisés dont certains peuvent être fonction de variables extrinsèques.

Pour remplir les fonctions pour lesquelles il a été conçu, ce montage doit satisfaire simultanément n conditions portant sur les principales grandeurs caractéristiques et s'exprimant sous forme d'inéquations établies à partir du modèle mathématique choisi.

(V-1) $F_q(z_i) \leqslant 0$ avec $q = 1, \ldots n$ et $i = 1, \ldots p$

Les p paramètres considérés doivent donc vérifier le système de n inéquations (V-1) dont la solution peut être représentée sous la forme d'un hypervolume dans un espace à p dimensions.

Les méthodes de calcul classiques, de type déterministe, consistent à étudier cet hypervolume par l'intermédiaire de ses intersections avec différents plans de façon à placer le point représentatif P du montage à l'intérieur du volume solution. Cette opération s'effectue par approches successives et dans les méthodes les plus élaborées (5) on cherche à placer le point P au centre du volume afin de pallier l'effet de toute incertitude ou dispersion sur les paramètres et de leurs variations en fonction de contraintes extérieures.

V-2-1 Notion d'optimalisation

Si le volume solution du système d'inéquations (V-1) est consistant, il existe une infinité de montages répondant aux conditions requises pour présenter un fonctionnement correct. Chacun d'eux est défini par les coordonnées d'un point représentatif P à l'intérieur de l'hypervolume.

Cependant si toutes les solutions conduisent à un résultat satisfaisant du point de vue de la sécurité de fonctionnement, elles ne sont pas équivalentes puisqu'elles correspondent chacune à un ensemble de paramètres différent et par conséquent à des valeurs différentes des grandeurs caractéristiques. Dans ces conditions certaines d'entre-elles sont vraisemblablement préférables à d'autres et il est tout naturel de les rechercher. Pour cela il faut introduire une donnée supplémentaire qui servira de critère de choix et permettra d'affirmer que telle solution est meilleure que telle autre ; c'est l'optimalisation.

V-2-2 Optimalisation simple

Les critères de choix possibles sont multiples et dépendent avant tout de la finalité du montage et des moyens mis à la disposition de l'électronicien. On peut prendre la puissance consommée par le circuit, la puissance de commande, la puissance de sortie, le rendement, un paramètre particulier du montage, etc. ...

Dans tous les cas il faut ajouter au système d'inéquations précédent conduisant au volume solution, une condition supplémentaire portant sur la grandeur à optimaliser (H minimale ou maximale). Cette adjonction conduira en général à une solution unique dont le point représentatif P sera situé à l'intérieur du volume précédent.

La figure (V.1) illustre ce qui précède dans le cas d'un circuit où tous les paramètres ainsi que les variables extrinsèques peuvent être rigoureusement définis (absence de dispersion) lorsqu'on ramène le problème à deux variables seulement en considérant par exemple l'intersection du volume solution par un plan (z_1, z_2).

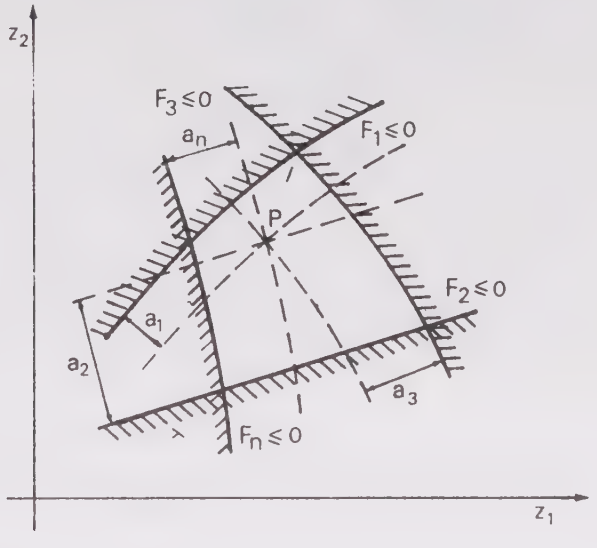


Figure V-1

Remarque : Soit le point P solution de l'optimalisation de la grandeur $H(z_i)$ en présence des conditions de fonctionnement $F_q(z_i) \leq 0$ qui délimitent une surface dans le plan (z_1, z_2). On peut considérer

que P est situé à l'intersection de toutes les frontières préalablement décalées d'une certaine quantité a_q. C'est donc la solution du système d'équations (V-2) que l'on obtient à partir des inéquations précédentes en introduisant les constantes a_q.

$$(V\text{-}2) \qquad \begin{cases} F_1 + a_1 = 0 \\ F_2 + a_2 = 0 \\ - \; - \; - \; - \; - \\ F_n + a_n = 0 \end{cases}$$

Le point P n'est situé à l'intérieur de la surface permise (cas de la figure V-1) que si la grandeur optimalisée H n'est pas une fonction linéaire de z_1 et z_2 ; dans le cas contraire il est nécessairement placé sur l'une des frontières au moins.

Nous pouvons remarquer également que toutes les quantités $F_q(z_i)$ ne peuvent pas être nulles simultanément pour l'optimum, c'est-à-dire qu'il n'est pas possible de vérifier toutes les conditions aux limites.

V-2-3 Influence de la dispersion sur les paramètres du montage

Nous avons vu dans le chapitre précédent que les quantités F_q qui interviennent dans les conditions de fonctionnement ne peuvent pas être rigoureusement connues à cause de l'incertitude sur les valeurs des différents paramètres. On ne connaît en fait que la valeur nominale F_{oq} , dans un milieu ambiant bien défini .

L'inégalité peut s'écrire :

$$F_{oq} + \delta F_q \leqslant 0$$

où δF_q peut prendre toutes les valeurs comprises entre deux limites

$$- \Delta F_q \text{ et } + \Delta' F_q$$

$$- \Delta F_q \leqslant \delta F_q \leqslant \Delta' F_q$$

Une frontière d'équation $F_q = 0$ considérée précédemment peut donc prendre une infinité de positions à l'intérieur d'une surface délimitée par les courbes

$$F_{oq} - \Delta F_q = 0$$

$$F_{oq} + \Delta' F_q = 0$$

Si l'on considère une infinité de montages de conception identique, les frontières correspondantes seront réparties sur une zone d'épaisseur $(\Delta F_q + \Delta' F_q)$ avec une certaine probabilité que l'on pourrait éventuellement déterminer (Fig. V-2).

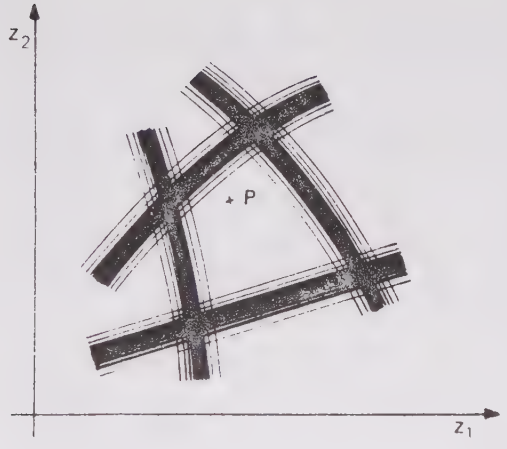


Figure V-2

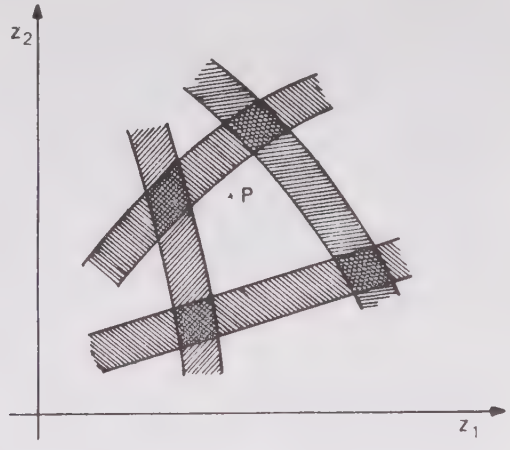


Figure V-3

Dans la méthode du cas le plus défavorable que nous adopterons par la suite, on réduit la surface permise à sa plus faible expression en prenant comme frontières effectives celles au-delà desquelles la probabilité de non fonctionnement est rigoureusement nulle. De façon imagée nous pouvons dire que les frontières deviennent des murs pleins à l'intérieur desquels la probabilité de fonctionnement est supposée nulle. Le point représentatif du circuit étudié devra se trouver à l'intérieur de l'enclos résultant.

Si nous considérons à nouveau le problème dans l'espace à N dimensions, l'hypervolume permis est compris à l'intérieur d'une enveloppe dont les parois ont une épaisseur non nulle.

V-2-3-1 Optimalisation d'une grandeur quelconque

Le problème est le même que précédemment ; la seule différence provient de la surface plus restreinte, limitée non par les frontières nominales mais par les frontières les plus défavorables compte-tenu des variables extrinsèques et de la dispersion sur tous les paramètres.

V-2-3-2 Optimalisation de la sécurité de fonctionnement

Prenons comme objectif de l'optimalisation un facteur de dispersion.

Nous entendons par facteur de dispersion tout paramètre ou variable qui contribue directement à l'incertitude sur les grandeurs caractéristiques donc sur les conditions de fonctionnement et par suite sur les frontières. Il peut s'agir de l'incertitude ou de la dispersion sur l'un des paramètres, d'une combinaison linéaire d'incertitudes sur plusieurs paramètres constituant une formule de pondération ou bien encore de la plage de variation d'une variable extrinsèque du montage comme la température par exemple. Nous avons vu qu'une telle plage de variation pouvait être assimilée à une dispersion sur un paramètre quant à son influence sur le fonctionnement du montage. Tous ces facteurs de dispersion ont qualitativement la même influence sur les conditions de fonctionnement du montage ; l'augmentation de l'un d'eux se traduit par un élargissement des frontières affectées par celui-ci.

L'optimalisation envisagée consiste donc à chercher quel est le montage qui tolère les incertitudes les plus grandes sur ses paramètres, autrement dit, celui qui fonctionne encore dans les plus mauvaises conditions. Elle est particulièrement intéressante dans le cas de montages qui présentent un fonctionnement critique et pour lesquels par conséquent on s'attache à pallier ce défaut avant de considérer d'autres caractéristiques.

Considérons un facteur de dispersion Δ du montage. A chaque valeur de Δ correspond un domaine solution sur le plan (z_1, z_2).

Une augmentation de Δ entraîne un accroissement de l'épaisseur des frontières et par suite un rétrécissement de la surface permise. La valeur maximale du facteur de dispersion est obtenue lorsque la surface résultante est réduite à un point. Ce point représente la solution de l'optimalisation ; il se trouve obligatoirement à l'intersection de plusieurs frontières limites.

Si nous considérons le facteur de dispersion Δ comme variable supplémentaire dans l'espace (Fig. V.4) nous voyons qu'à chaque valeur de Δ correspond un plan (z_1, z_2) qui coupe le volume solution suivant une intersection de forme analogue à celle représentée figure (V.3).

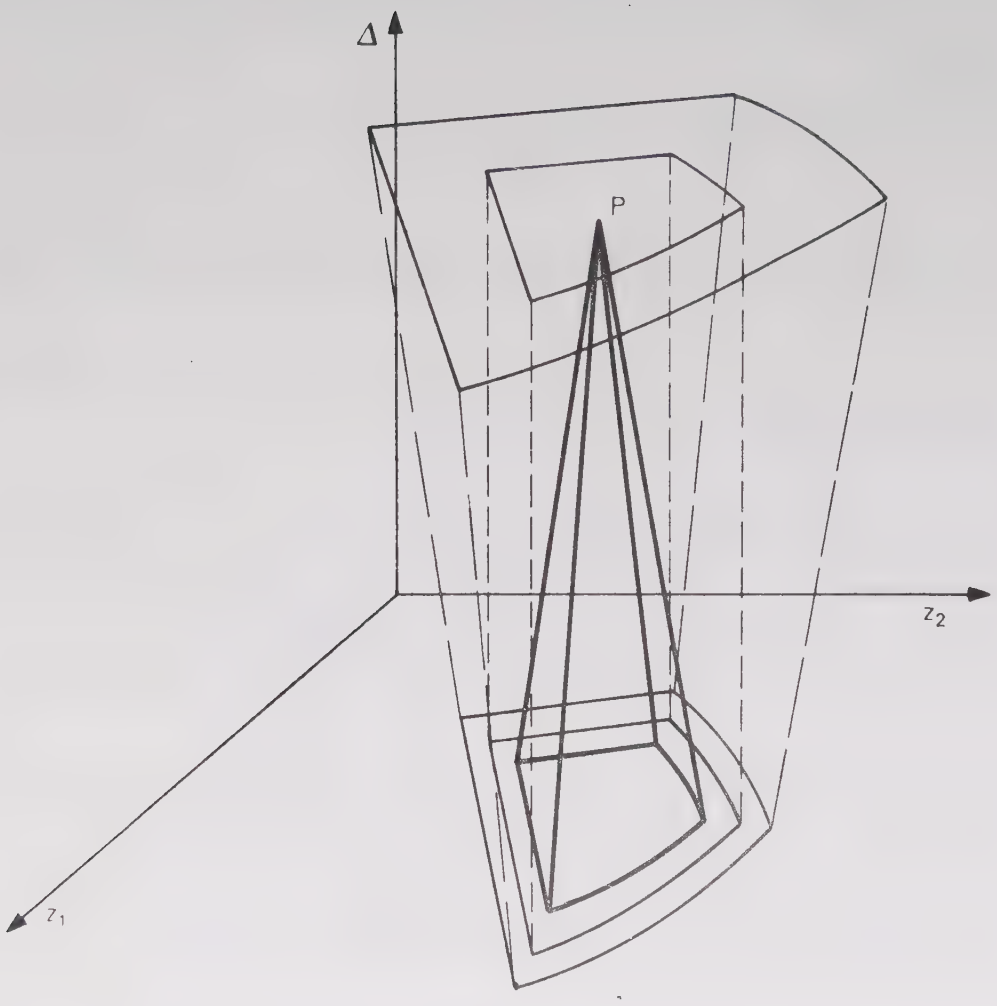


Figure V-4

L'optimalisation consiste à chercher quel est le plan le plus haut (Δ le plus grand) qui coupe ce domaine. Il le fera en un seul point, au sommet qui correspond nécessairement à l'intersection de plusieurs frontières.

Remarque : Les méthodes d'optimalisation de type déterministe mentionnées dans le chapitre précédent se contentent de placer le point P au "centre" de la surface délimitée par les frontières nominales sur le plan (z_1, z_2) (Fig. V.1). Elles ne conduisent pas de façon logique à un véritable optimum.

V-3 PROCEDES GENERAUX D'OPTIMALISATION

Le problème d'optimalisation que nous cherchons à résoudre est un problème classique en recherche opérationnelle, connu de tous les automaticiens. (1,2,4).

Nous pouvons le définir ainsi : il s'agit de l'optimalisation d'un processus statique en présence de conditions du type inégalité appelées contraintes.

- C'est un processus statique car tous les paramètres du montage sont supposés invariables dans le temps. Il peut être tenu compte du vieillissement des composants mais au même titre que de l'influence de la température par exemple, c'est-à-dire en introduisant l'écart que peut présenter ce paramètre par rapport à sa valeur nominale tout au long de la durée de vie souhaitée pour le montage. Le critère d'optimalisation n'est pas à proprement dit une fonction du temps.

- Les paramètres doivent vérifier en permanence toutes les conditions de fonctionnement qui s'expriment sous forme d'inégalités que l'on appelle contraintes du montage.

Le critère d'optimalisation étant déterminé, le choix de la méthode de résolution dépend alors :

- de la précision désirée dans l'optimalisation.
- des données du problème et plus précisément de leur nature ; elles peuvent résulter d'un modèle mathématique ou de courbes expérimentales relevées point par point.
- de la nature de la fonction à optimaliser et de celle des contraintes (forme mathématique linéaire ou non-linéaire).
- du nombre de paramètres du montage.

V-3-1 Programmation linéaire

Cette méthode d'optimalisation ne peut être envisagée que si la fonction objectif, d'une part et les contraintes, d'autre part, sont des relations linéaires des différents paramètres.

En général il y a davantage de paramètres que de contraintes mais ce n'est pas une condition impérative car dans le cas contraire, les contraintes étant de type inégalité, il est toujours possible d'introduire des variables supplémentaires.

L'ensemble des contraintes délimite un espace convexe (à partir ou vers l'origine) et à chaque valeur de la fonction à optimaliser correspond un hyperplan dont la distance à l'origine est proportionnelle à cette valeur.

L'optimalisation consiste donc à chercher quel est l'hyperplan le plus près ou le plus loin de l'origine qui coupe le domaine solution du système d'inéquations.

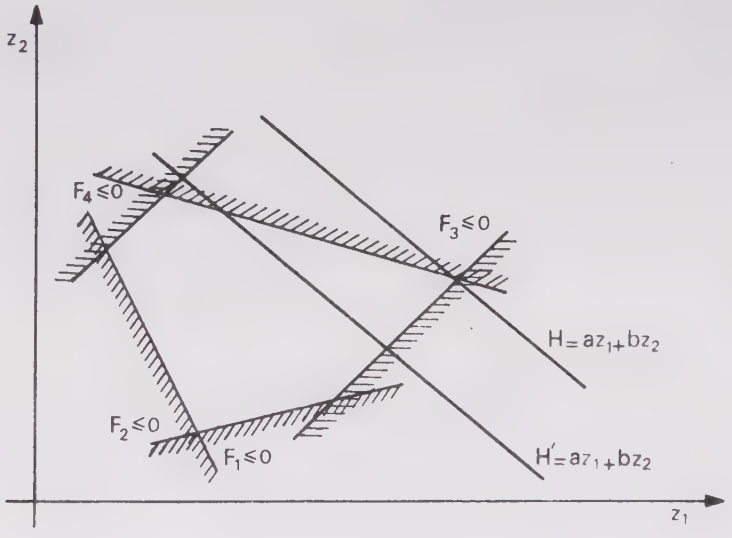


Figure V-5

Cette détermination est facile dans le cas de deux, voire trois variables mais au-delà la résolution graphique est inconcevable.

On peut toutefois utiliser une méthode itérative car l'optimum correspond à l'un des points extrêmes, c'est-à-dire un sommet du polyèdre que constitue l'espace convexe délimité par les contraintes, et pour le trouver, il suffit de calculer successivement la valeur de la fonction à optimaliser pour chacun des sommets. C'est une méthode convergente puisque le nombre de sommets est fini, mais elle conduit à des calculs prohibitifs.

Il existe un algorithme de recherche : la technique du simplexe imaginée par G. DANTZIG (2) (3). Les contraintes inégalités sont transformées en contraintes égalités en ajoutant des inconnues supplémentaires appelées pseudo-variables ou variables d'écart. La technique du simplexe permet alors de déterminer de façon itérative l'optimum de la fonction objectif et les valeurs des paramètres correspondants y compris les pseudo-variables dont deux d'entre-elles sont nulles.

Nous voyons que dans la mesure où toutes les fonctions sont linéaires cette méthode permet de résoudre l'optimalisation des circuits telle que nous l'avons présentée au paragraphe V-2.

Malheureusement, dans la majorité des cas de l'optimalisation des circuits électroniques, la programmation linéaire ne peut être utilisée car même si la fonction objectif présente une forme simple (optimalisation de la sécurité de fonctionnement par exemple), les contraintes ne sont que très rarement linéaires. La non-linéarité provient en partie des caractéristiques des composants actifs utilisés mais surtout de l'introduction des dispersions sur les différents paramètres dans les conditions de fonctionnement car l'incertitude sur une grandeur caractéristique n'est pas une fonction linéaire des incertitudes sur les paramètres qui la déterminent. Nous devons avoir recours à la programmation non-linéaire.

V-3-2 Programmation non-linéaire

Il n'existe pas de méthodes générales de résolution mais plusieurs méthodes particulières suivant les problèmes pratiques.

V-3-2-1 Linéarisation des caractéristiques

Cette méthode n'est utilisable pour l'optimalisation des circuits électroniques que si la non-linéarité des équations provient uniquement des caractéristiques des composants actifs.

Elle consiste à remplacer une courbe donnée par un ensemble de segments de droite.

On considère alors la courbe sous forme paramétrique en introduisant des nouvelles variables n_j telles que :

$$(V\text{-}3) \qquad \begin{cases} x = \sum_j n_j . x_j \\ y = \sum_j n_j . y_j \end{cases}$$

avec $\sum n_j = 1$

et sachant qu'il ne peut y avoir plus de deux variables n_j non nulles ; lorsque deux d'entre elles ne sont pas nulles, il s'agit obligatoirement de variables consécutives n_j et n_{j+1}.

Nous voyons sur la figure V.6 que si $n_j = 0,5$, $n_{j+1} = 0,5$ le point P a pour coordonnées :

$$P \begin{cases} x = 0,5\ x_j + 0,5\ x_{j+1} \\ y = 0,5\ y_j + 0,5\ y_{j+1} \end{cases}$$

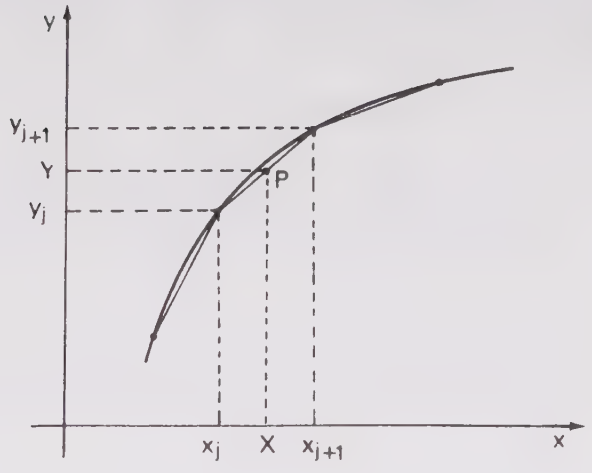


Figure V-6 Linéarisation des caractéristiques

Cette linéarisation des caractéristiques permet d'introduire la programmation linéaire.

V-3-2-2 Programmation linéaire paramétrique (P. L. P.)

Dans cette méthode de résolution, l'on considère de petites variations autour d'un point de fonctionnement pour lequel on connaît les différents paramètres et l'on modifie la valeur de ces

paramètres au fur et à mesure que la solution évolue, c'est-à-dire que le point de fonctionnement se déplace.

On peut alors appliquer la programmation linéaire et trouver la solution exacte par approches successives mais ceci conduit à une résolution assez complexe.

Il existe un autre inconvénient à cette méthode ; l'obtention d'un résultat est liée à l'existence d'un optimum car dans le cas contraire on aboutit à des oscillations indéfinies.

V-3-2-3 Programmation convexe

C'est une méthode plus générale que les précédentes qui s'applique lorsque la fonction à optimaliser est continue, linéaire ou non, concave ou convexe et lorsque les contraintes correspondent à des fonctions linéaires pour celles de type égalité ou à des fonctions continues convexes pour celles de type inégalité.

On démontre (1) que :

- Un ensemble D défini par des contraintes de type inégalité de la forme $F_q(z_i) \leqslant 0$ est convexe si toutes les fonctions F_q sont convexes ($q = 1,2 \text{ --- } n$).

- Si une fonction concave est bornée inférieurement sur un ensemble convexe D, le minimum absolu est atteint en un ou plusieurs des points extrêmes de D.

- Si une fonction convexe est bornée supérieurement sur un ensemble convexe D, le maximum absolu est atteint en un ou plusieurs des points extrêmes de D.

Par conséquent, lorsque les hypothèses précédentes sont vérifiées, il suffit de rechercher l'optimum en des points très particuliers de l'ensemble D puisque la solution est située sur l'enveloppe. Ceci peut être réalisé à l'aide de la programmation linéaire. Nous rencontrerons ce cas dans l'optimalisation de la sécurité de fonctionnement d'un circuit.

V-3-2-4 Paramètres de KUHN et TUCKER

Cette méthode est une extension de la méthode des multiplicateurs de LAGRANGE.

Associons une variable supplémentaire y_q à chaque contrainte de façon à pouvoir remplacer l'inégalité (V-1) par l'égalité :

(V-5) $$F_q + y_q^2 = 0$$

Le problème est alors modifié puisque l'on se retrouve en présence de contraintes de type égalité. On peut dans ces conditions introduire des facteurs multiplicateurs μ_q appelés paramètres de KUHN et TUCKER équivalents des paramètres de LAGRANGE.

On démontre (1) que le minimum de la fonction $H(z_i)$ correspond au minimum de la fonction :

(V-6) $$\Psi(z_i) = H(z_i) + \sum_{q=1}^{n} \mu_q . F_q(z_i)$$

avec

(V-7) $$\mu_q \cdot F_q(z_i) = 0$$

c'est-à-dire avec $\mu_q = 0$ si $F_q(z_i) < 0$

On démontre également que les variables y_q peuvent être nulles.

V-3-2-4-1 Résolution analytique approchée

On peut résoudre le problème analytiquement sans se soucier de la condition (V-7). Ceci nous conduit à utiliser directement la méthode des multiplicateurs de LAGRANGE qui sert à l'optimalisation de fonctions en présence de contraintes de type égalité.

Cette résolution ne donne qu'un résultat approché puisqu'on impose arbitrairement à toutes les contraintes d'être saturées.

V-3-2-4-2 Méthodes de résolution rigoureuse

On tient compte de la condition (V-7)

avec $F_q(z_i) \leq 0$

Il est nécessaire d'étudier toutes les combinaisons possibles correspondant à la saturation ou non de chaque contrainte ($\mu_q \neq 0$ ou $\mu_q = 0$) et de vérifier chaque fois si la solution trouvée convient.

Nous pouvons avoir : aucune contrainte saturée ($\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_n = 0$), l'une quelconque d'entre-elles saturée, deux quelconques saturées, etc. ...

Dans chaque cas particulier, il faut effectuer une résolution analytique identique à celle de la méthode des multiplicateurs de LAGRANGE.

V-3-2-4-3 Méthode des multiplicateurs de LAGRANGE

Cette méthode est utilisée pour résoudre les problèmes d'optimalisation en présence de contraintes de type égalité. Nous allons en exposer sommairement le principe puisque la méthode des paramètres de KUHN et TUCKER conduit à la même résolution.

Soit une fonction $H(z_i)$ dont on cherche le maximum en présence des contraintes égalités ou liaisons :

$$F_q(z_i) = 0 \qquad \text{avec} \qquad q = 1,2\ldots n$$

$$i = 1,2\ldots p$$

les fonctions $F_q(z_i)$ étant de forme quelconque.

On démontre (1) que si les fonctions $H(z_i)$ et $F_q(z_i)$ satisfont aux conditions de continuité, pour qu'un point (z_i) soit un extrémum local, il est nécessaire qu'il existe des paramètres λ_q(multiplicateurs de LAGRANGE) tels que la fonction

$$\text{(V-8)} \qquad \Psi(z_i, \lambda_q) = H(z_i) + \sum_q \lambda_q . F_q(z_i)$$

soit stationnaire par rapport à z et λ.

ce qui impose :

$$\text{(V-9)} \qquad \left| \begin{array}{l} \dfrac{\delta}{\delta z_i} \Psi(z_i, \lambda_q) = 0 \\ \\ \dfrac{\delta}{\delta \lambda_q} \Psi(z_i, \lambda_q) = 0 \end{array} \right.$$

Il en résulte une méthode de résolution dont le processus comprend les étapes suivantes :

- on introduit des multiplicateurs λ_q.
- on forme la nouvelle fonction (V-8).
- on écrit les conditions de stationnarité (V-9) formant un nombre (n+p) d'équations égal au nombre d'inconnues z_i et λ_q.
- et on résoud ce système pour obtenir les valeurs des variables z_i correspondant à l'optimum et celles des multiplicateurs λ_q.

Cette méthode est relativement complexe quand la fonction objectif et les contraintes sont toutes non linéaires et quand le nombre p de paramètres est élevé. En effet le système à résoudre comporte alors un très grand nombre d'équations (n+p), chacune d'entre-elles étant de degré élevé, ce qui entraîne un nombre théorique de solutions considérable puisqu'il correspond à une combinaison de toutes les solutions possibles de chaque équation.

V-3-2-5 Fonctions de pénalisation

Cette méthode consiste à introduire des fonctions de pénalisation $P_q(z)$ continues et dérivables telles que

$$(V\text{-}10) \qquad \begin{cases} P_q(z) = 0 & \text{si} \quad F_q(z) \leq 0 \\ P_q(z) > 0 & \text{si} \quad F_q(z) > 0 \end{cases}$$

et à utiliser comme critère modifié, la fonction :

$$(V\text{-}11) \qquad \Psi(z) = H(z_i) + \sum_q K_q . P_q(z)$$

On démontre (1) que lorsque les K_q tendent vers l'infini, le minimum de la fonction $\Psi(z)$ tend vers le minimum de $H(z_i)$. Il est alors possible de résoudre ce problème à l'aide d'un algorithme itératif, mais l'obtention d'un résultat dépend énormément de la nature de la fonction à optimaliser et de celle des contraintes.

V-3-3 Conclusion - Application à l'optimalisation de circuits électroniques.

Les contraintes qui apparaissent dans les pro-

blèmes d'optimalisation de circuits électroniques ne sont pratiquement jamais linéaires dès que l'on introduit l'incertitude sur les différents paramètres. Cette remarque amène quelques réflexions sur le choix d'un processus.

Parmi toutes les méthodes de résolution que nous avons décrites sommairement, l'on doit écarter la programmation linéaire de même que les méthodes basées sur la linéarisation des caractéristiques. La "programmation linéaire paramétrique" et la méthode basée sur les fonctions de pénalisation peuvent être employées bien qu'elles nécessitent des calculs souvent complexes mais elles ne conduisent pas toujours à des résultats. La programmation convexe n'est applicable que dans certains cas particuliers ; quant à la méthode des paramètres de KUHN et TUCKER, elle peut être utilisée mais sa résolution est d'autant plus complexe que le nombre de paramètres et de contraintes est grand, les calculs devenant même prohibitifs lorsque toutes les fonctions ont une forme mathématique non linéaire de degré élevé.

V-4 OPTIMALISATION DES CIRCUITS ELECTRONIQUES LOGIQUES

V-4-1 Problème particulier de l'optimalisation des circuits électroniques.

Lorsqu'on veut utiliser une méthode générale d'optimalisation pour l'étude des circuits électroniques, on doit résoudre des calculs relativement complexes dans la plupart des cas, à cause de la non-linéarité des équations. Cependant, connaissant de façon précise les données exactes du problème, la nature de l'optimalisation et les phénomènes physiques auxquels elle se rapporte, on peut choisir une méthode appropriée et quelquefois particulière à l'étude des circuits. C'est un avantage que possède l'électronicien face à l'automaticien.

Avant d'aborder l'optimalisation des circuits électroniques nous allons donc voir quelles sont les particularités qui la différencient des problèmes généraux.

Un montage est caractérisé par ses conditions de fonctionnement définissant des contraintes du problème que nous appellerons contraintes principales. Celles-ci présentent une particularité importante ; elles ne sont pas indépendantes et cette intéraction permet d'introduire une notion supplémentaire, celle de compromis.

Les conditions de fonctionnement concernent avant tout les grandeurs caractéristiques qui jouent un rôle prépondérant dans le montage et dépendent essentiellement d'un nombre restreint de paramètres que nous appellerons inconnues principales.

Les autres paramètres du montage peuvent se classer en deux groupes :

- les données comme par exemple les caractéristiques des composants actifs utilisés.

- les inconnues secondaires appelées ainsi parce qu'on ne connaît pas a priori leur valeur optimale, mais elles n'ont que peu d'influence sur le fonctionnement du montage. En tout état de cause leur choix arbitraire n'entraîne pas systématiquement une impossibilité de réalisation contrairement à ce que l'on observe pour les inconnues principales.

Les inconnues secondaires font l'objet de restrictions sous forme de valeurs extrêmes imposées par des limitations physiques de façon à rester dans le domaine du possible. Il apparaît alors des contraintes secondaires d'un caractère particulier puisque chacune d'elles ne concernent qu'un paramètre.

L'optimalisation présente une autre particularité lorsque la fonction objectif est une fonction convexe des paramètres : l'optimum correspond à la saturation de plusieurs contraintes et le point représentatif P est situé sur un sommet du domaine solution du système d'inéquations. Ceci est vérifié dans l'étude des circuits logiques qui porte généralement sur la sécurité de fonctionnement par l'intermédiaire d'un facteur de dispersion ou d'une combinaison linéaire de ceux-ci (figure V.4).

V-4-2 Intéraction entre les contraintes - Notion de compromis

V-4-2-1 Exemple

Nous allons illustrer ce phénomène d'intéraction et ses conséquences sur l'optimalisation par un exemple comparatif simple. Un problème souvent rencontré en recherche opérationnelle et résolu à l'aide de la méthode générale de programmation linéaire, concerne l'utilisation optimale d'unités de fabrication dans une usine, conduisant au prix de revient le plus bas. Chaque unité présente des caractéristiques différentes en ce qui concerne la capacité de production, le prix de revient, le temps d'emploi, etc. ... Les contraintes, de type inégalité, portent sur les temps d'utilisation de chaque unité. On démontre que l'optimum correspond à l'emploi maximal d'une ou, plus généralement, de deux unités au maximum. Le sous-emploi d'une unité n'entraîne aucune modification des caractéristiques des autres et par conséquent ne présente aucune influence sur leurs conditions d'utilisation.

Envisageons maintenant l'optimalisation de la sécurité de fonctionnement d'un circuit logique.

Considérons un étage bistable à diode tunnel avec système de prépolarisation ; montage que nous étudions par ailleurs. Les contraintes du problème porteront essentiellement sur les caractéristiques de commande du circuit dans les différents états. Elles sont au nombre de trois et peuvent se résumer ainsi : une diode tunnel polarisée à un courant de repos I_o ne doit basculer que sous l'influence d'une impulsion de commande i et seulement si elle est prépolarisée par un courant additionnel I_{pp}.

Nous obtenons le système d'inéquations suivant :

$$(V\text{-}12) \qquad \begin{cases} I_o + I_{pp} + i \geqslant I_p + \varepsilon \\ I_o + I_{pp} \leqslant I_p - \varepsilon \\ I_o + i \leqslant I_p - \varepsilon \end{cases}$$

ε étant un coefficient de sécurité nécessaire au bon fonctionnement en régime dynamique. (C'est un seuil de discrimination).

Ces contraintes concernent toutes les trois le courant qui traverse la même diode tunnel dans chaque état. Elles ne sont pas indépendantes et il ne peut être question de respecter largement l'une d'elles sans entraîner de répercussions sur les autres.

Il apparaît une différence avec le problème précédent pour lequel le sous-emploi d'une unité n'avait aucune répercussion sur les conditions d'utilisation des autres. Ici, l'impulsion i par exemple doit avoir une amplitude suffisante pour faire basculer un étage prépolarisé mais pas trop grande pour ne pas entraîner le basculement de l'étage non prépolarisé.

Nous devons réaliser un compromis d'où l'existence d'une valeur optimale de i liée à celle des autres variables. Le même raisonnement peut être appliqué à I_{pp}, I_o ou I_p.

V-4-2-2 Cas général

Les conditions de fonctionnement d'un circuit portent essentiellement sur des combinaisons linéaires de certaines grandeurs caractéristiques.

Elles traduisent un compromis sur chacune des grandeurs prises séparément. Il est en effet possible d'exprimer ces conditions de fonctionnement différemment et de les énoncer

sous la forme générale suivante : une grandeur caractéristique G_ℓ doit être suffisante pour qu'une fonction donnée du montage soit réalisée mais elle ne doit pas être trop grande pour ne pas compromettre les autres fonctions.

L'existence d'une valeur optimale pour une grandeur d'un système est liée à celle d'un compromis sur cette grandeur.

Remarque : Si dans un montage donné l'une des grandeurs caractéristiques n'était pas assujétie à un compromis par les contraintes principales, il serait nécessaire d'introduire des conditions secondaires lui imposant des bornes ; limites physiques déterminées soit par des considérations de fonctionnement en régime dynamique, soit par des conditions de dissipation de puissance ou tout simplement par une impossibilité de réalisation.

Toutes les grandeurs caractéristiques d'un montage sans exception font donc l'objet d'un compromis et si l'on groupe toutes les contraintes affectant une même grandeur G_ℓ quelconque, on obtient un système d'inéquations que l'on peut écrire sous la forme :

$$(V\text{-}13) \qquad F_{i1}(z_i), \ldots, F_{ir}(z_i) \leqslant G_\ell(z_i) \leqslant F_{s1}(z_i), \ldots, F_{st}(z_i)$$

les quantités F_{ip} et F_{sr} étant soit des constantes soit des fonctions linéaires des autres grandeurs caractéristiques du montage.

V-4-3 Optimalisation compte tenu de la notion de compromis

V-4-3-1 Optimalisation de la sécurité de fonctionnement d'un circuit logique.

Considérons l'optimalisation de la sécurité de fonctionnement d'un montage, illustrée par les figures V.3 et V.4.

Nous avons vu que le montage optimal correspond au point représentatif P placé au sommet de l'hypervolume délimité par les conditions de fonctionnement, c'est-à-dire à la limite obtenue lorsque, Δ augmentant, les frontières s'élargissent au point qu'il ne reste plus qu'une surface ponctuelle sur le plan (Z_1, Z_2) considéré à la figure V.3. P est alors situé à l'intersection de plusieurs frontières, point caractéristique de la saturation simultanée de plusieurs contraintes.

Supposons que l'une des contraintes principales ne soit pas saturée auquel cas, la frontière correspondante passe obligatoirement en deçà du point P. Cela signifie que l'une des grandeurs intervenant dans cette contrainte est, ou trop faible, ou trop forte, suivant le sens de l'inégalité, compte tenu du compromis que l'on doit réaliser. Le simple fait de lui donner la valeur juste nécessaire pour remplir la condition de fonctionnement se traduira par un excès sur les autres conditions c'est-à-dire par un recul des autres frontières et donc par la possibilité d'augmenter encore le facteur de dispersion considéré.

L'optimum sera obtenu lorsque toutes les contraintes seront saturées, ce qui correspond aux conditions aux limites, car les conditions de fonctionnement prises deux par deux traduisent implicitement ou explicitement un compromis sur une grandeur caractéristique.

Remarque : Ce résultat est logique. Ne pas prendre une condition à la limite revient à disposer d'un excès de sécurité pour une fonction uniquement, ce qui non seulement ne sert à rien si l'on considère le montage complet, mais se répercute sur les autres conditions à remplir sous la forme d'un défaut. On conçoit aisément que si une quantité doit être supérieure à une limite pour qu'une fonction soit réalisée, il n'est pas nécessaire qu'elle lui soit très supérieure.

V-4-3-2 Optimalisation d'une grandeur convexe quelconque

La méthode précédente, élaborée pour l'optimalisation d'un facteur de dispersion, constitue en quelque sorte une extrapolation du principe de la programmation convexe compte tenu de la notion de compromis. Elle est équivalente à celle que l'on utilise quelquefois avec les paramètres de KUHN et TUCKER dans le cadre de la résolution approchée d'un problème général.

Le même principe conduit naturellement à l'optimalisation simultanée d'un certain nombre de grandeurs représentées par des fonctions convexes, ou linéaires à la limite, des paramètres du montage.

Reprenons l'exemple de l'étage bistable à diode tunnel. Pour que le système d'inéquations V-12 soit vérifié à la limite (contraintes principales saturées), en l'absence de toute dispersion et incertitude sur les grandeurs caractéristiques, il suffit de prendre :

$$\begin{cases} i = 2\,\varepsilon \\ I_{pp} = 2\,\varepsilon \\ I_o = I_p - 3\,\varepsilon \end{cases}$$

Si les conditions précédentes ne sont pas prises à la limite, nous pourrons remplacer le système V-12 par le système d'équations :

$$\begin{cases} I_o + I_{pp} + i = I_p + \varepsilon + a_1 \\ I_o + I_{pp} = I_p - \varepsilon - a_2 \\ I_o + i = I_p - \varepsilon - a_3 \end{cases}$$

a_1, a_2, a_3 étant des constantes d'écart positives ou nulles.

Sa résolution nous donne alors :

$$\begin{cases} i = 2\,\varepsilon + a_1 + a_2 \\ I_{pp} = 2\,\varepsilon + a_1 + a_3 \\ I_o = I_p - 2\,\varepsilon - a_1 - a_2 - a_3 \end{cases}$$

Prendre les constantes a_1, a_2, a_3 nulles, c'est-à-dire toutes les contraintes saturées, conduit simultanément au maximum de I_o et au minimum de i et I_{pp}. Le montage optimal ainsi défini correspond non seulement à une puissance de commande minimale mais également à une puissance de sortie maximale dans la mesure où le montage peut délivrer un saut de courant pratiquement proportionnel à I_o.

V-4-3-3 Principe de l'optimalisation

Il consiste à imposer la saturation des contraintes principales du montage.

Comme il existe également des contraintes secondaires pour lesquelles on ne peut rien affirmer, le problème réside dans l'optimalisation d'un processus en présence de contraintes de type égalité et de type inégalité.

L'utilisation d'un processus général d'optimalisation conduirait à des calculs excessivement complexes qui ne se justifient pas ici compte tenu de la nature des contraintes. En effet, l'ensemble des conditions de fonctionnement constitue un système de n équations à partir duquel il est possible de déterminer la valeur de n inconnues principales qui définissent totalement le montage recherché en fonction des autres paramètres. Il suffit de choisir ces n inconnues en respectant les règles suivantes :

- Elles doivent jouer un rôle prépondérant dans les conditions de fonctionnement.

- Elles doivent être indépendantes et ne pas avoir une influence identique sur une même et seule grandeur caractéristique afin d'éviter toute indétermination.

- L'une d'elles doit être la grandeur optimalisée puisque le résultat de l'étude n'est pas connu à l'avance.

Tous les autres paramètres indéterminés deviennent des inconnues secondaires que l'on peut assimiler à des "données" en leur attribuant momentanément une valeur arbitraire, quitte à préciser par la suite leur valeur optimale. Très souvent, celle-ci peut être déduite d'une rapide étude qualitative du montage. C'est le cas par exemple de la dispersion sur un paramètre dont on peut prévoir à priori qu'elle doit être minimale.

Ayant fixé les "données" et attribué une valeur, justifiée ou non, aux inconnues secondaires, la résolution du système d'équations permet de déterminer les paramètres principaux du montage et la valeur de la grandeur optimalisée.

Comme au cours de la résolution mathématique de l'optimalisation aucune précaution n'est prise sur les inconnues, celles-ci peuvent être négatives. Lorsqu'il se produit, ce fait traduit une impossibilité de réalisation à partir de l'ensemble de "données" choisi.

Le changement de valeur d'une "donnée" entraîne nécessairement une modification de la solution de l'étude et par suite de la grandeur optimalisée. Il suffit par conséquent de faire varier cette "donnée" et de noter systématiquement son influence sur le critère considéré pour en déduire sa valeur optimale compte tenu d'éventuelles limitations physiques.

L'opération peut-être recommencée pour toutes les inconnues secondaires dont il est nécessaire d'étudier l'influence ; elle conduit alors au montage optimal dans la mesure où toutes les courbes de variations sont monotones ce qu'il est facile de vérifier en pratique. Dans le cas contraire il faudrait déterminer cet optimum par approches sucessives.

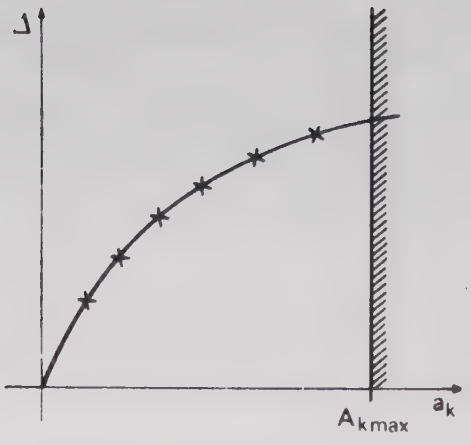


Figure V-7

Exemple de courbe de variation d'un facteur de dispersion Δ en fonction d'une donnée a_k.

Nous voyons que la plus grande sécurité de fonctionnement sera obtenue pour $a_k = A_{kmax}$ valeur maximale que peut prendre a_k compte tenu de limitations physiques.

V-4-4 Résumé de la méthode d'optimalisation des circuits électroniques - Conclusion.

Nous avons vu dans le chapitre III qu'un montage est caractérisé par :

1°) Un ensemble de paramètres comprenant :

- m variables extrinsèques $y_j = y_{oj} + \delta y_j$
  y_{oj} étant la valeur moyenne de la plage P_j, et
  δy_j l'écart de y_j par rapport à y_{oj} avec
  $-\Delta y_j \leqslant \delta y_j \leqslant \Delta y_j$.
- p variables intrinsèques $z_i(y_j)$ que l'on peut écrire sous la forme :

$$z_i = \left(1 + \zeta_{oi}(\delta y_j)\right) \cdot \left(1 + \frac{\delta z_i}{z_{noi}}\right) \cdot z_{noi}$$

z_{noi} étant la valeur nominale de z_i pour l'ensemble des variables y_{oj}, $\delta z_i / z_{noi}$, l'écart dû à la dispersion sur ce paramètre et ζ_{oi} traduisant la variation relative de z_i en fonction des variables extrinsèques y_j.

2°) N "données"

3°) L grandeurs caractéristiques G_ℓ

4°) n conditions de fonctionnement qui sont des combinaisons linéaires des grandeurs caractéristiques G_ℓ et que l'on peut écrire sous la forme générale (III-12)

$$H_q(z_{noi}) + h_{q1}(z_{noi}, \delta y_j) + h_{q2}(z_{noi}, \frac{\delta z_i}{z_{noi}}) + h_{q3}(z_{noi}, \delta y_j, \frac{\delta z_i}{z_{noi}}) \leqslant K_q$$

ou

$$F_q(z_i) \leqslant 0 \qquad \text{(V-1)}$$

Le processus de calcul décrit précédemment permet d'optimaliser la sécurité de fonctionnement du montage par l'intermédiaire d'un facteur de dispersion. Il consiste à introduire les équations aux limites issues des conditions de fonctionnement.

Pour cela, l'inégalité (V-1) est remplacée par l'égalité

$$\left[F_q(z_i)\right]_{max} = 0$$

obtenue en remplaçant dans l'expression de $F_q(z_i)$:

1°) $\frac{\delta z_i}{z_{noi}}$ par $\pm \frac{\Delta z_i}{z_{noi}}$ le signe plus ou moins étant choisi de façon à obtenir le cas le plus défavorable.

et

2°) δy_j par $\pm \Delta y_j$ de façon à obtenir la valeur maximale de F_q. Cette opération n'est rigoureuse que si F_q est une fonction monotone de chaque variable y_j, condition pratiquement toujours vérifiée. Dans le cas contraire il faudrait exprimer cette valeur maximale en fonction de y_j.

On dispose ainsi d'un système de n équations. Il suffit alors de choisir (n-1) inconnues principales parmi les p variables intrinsèques, la dernière étant la grandeur à optimaliser c'est-à-dire un facteur de dispersion. Celles-ci doivent jouer un rôle prépondérant dans les conditions de fonctionnement tout en étant indépendantes les unes des autres. Les (p-n + 1) variables intrinsèques restantes sont les inconnues secondaires du montage, assimilées à des données auxquelles on attribue soit leur valeur optimale si une simple étude qualitative permet de la déterminer, soit une valeur arbitraire.

La résolution du système d'équations permet de déterminer la valeur des paramètres principaux du montage recherché, pour l'ensemble des données choisi et celle de la grandeur optimalisée.

En recommençant l'opération pour différentes valeurs d'une inconnue secondaire, on peut en déduire son influence sur le critère d'optimalisation et par suite sa valeur optimale. Cette étude généralisée à toutes les inconnues secondaires dont on n'a pu prévoir l'influence sur le fonctionnement du montage, permet de déterminer la valeur optimale de tous les paramètres du circuit compte tenu des limitations physiques et la valeur correspondante de la grandeur optimalisée.

Nous appliquerons ce processus de calcul à l'optimalisation de la décade à diodes tunnel décrite dans le chapitre II.

BIBLIOGRAPHIE DU CHAPITRE V

(1) BOUDAREL - DELMAS - GUICHET

Commande optimale des Processus
Dunod Paris - 1968 - Tome 2

(2) C. W. CHURCHMAN - R. L. ACKOFF - E. L. ARNOFF

Eléments de recherche opérationnelle.
Dunod Paris 1961 - Tome 5

(3) G. DANTZIG

Linear programming and extensions
Princeton University Press 1963

(4) L. PUN

Introduction to optimization practice
John Wiley & Sons, Inc - New-York - 1969.

(5) RAULT J. C.

Les méthodes d'optimalisation des circuits électroniques.
L'Onde Electrique - Vol. 48 - n° 493 - avril 1968 - pp. 293 - 302.

CHAPITRE VI

RESOLUTION DE L'OPTIMALISATION

Le problème consiste à résoudre un système de n équations non linéaires à n inconnues. La quantité n dépend de la complexité du montage à optimaliser et plus précisément du nombre de conditions de fonctionnement ; quant à la non linéarité, elle peut provenir de la nature des inconnues, voire de la présence d'éléments non linéaires dans le circuit mais de toute façon elle est effective dès que l'on introduit les tolérances des paramètres dans les calculs.

Toutes les méthodes générales de résolution sont basées sur des processus d'approximations successives car il n'est pas possible, sauf dans quelques cas particuliers exceptionnels, de résoudre un tel système analytiquement.

Le principe de ces méthodes itératives consiste à établir un système de récurrence linéaire qui, à partir d'un ou plusieurs points arbitraires, permet de déterminer un point plus proche de la solution de sorte qu'en recommençant l'opération on converge vers cette solution. Les calculs sont interrompus lorsque celle-ci est atteinte avec une précision que l'on estime suffisante. Pour certains processus, il est nécessaire que le point de départ soit près de la solution mais ceci ne constitue pas un handicap dans notre cas puisque les inconnues sont des grandeurs physiques dont on peut déterminer a priori une valeur approximative.

Nous allons décrire brièvement différentes méthodes de résolution avant d'en choisir une qui soit rapide, efficace, facile à mettre en oeuvre et adaptée à notre problème particulier.

VI-1 METHODES DE RESOLUTION PAR APPROXIMATIONS SUCCESSIVES

Il en existe de nombreuses que nous classerons suivant le processus utilisé, leur principe de base, leur ordre de récurrence et leur degré de convergence.

VI-1-1 Données du problème

Soit à résoudre le système de n équations :

$$F_q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \qquad \text{avec} \qquad q = 1, 2, \ldots, n \tag{VI.1}$$

que l'on peut écrire sous forme symbolique :

$$F_q(X) = 0 \tag{VI.2}$$

X représentant le vecteur de composantes $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

De par son principe, une méthode d'approximations successives fait appel à un processus itératif qui consiste à calculer, à partir d'un (ou plusieurs) point(s) donné(s), un nouveau point X plus proche de la solution. On utilise pour cela une loi de récurrence de forme générale :

$$X^{(k+p)} = H(X^{(k)}, X^{(k+1)}, \ldots, X^{(k+p-1)}) \tag{VI.3}$$

C'est par définition un système de récurrence d'ordre p ou à p points (3).

Dans le cas d'une récurrence à un point, le système précédent devient :

$$X^{(k+1)} = H(X^{(k)}) \tag{VI.4}$$

Lorsque la loi choisie est convergente le point $X^{(k)}$ tend vers le point limite α, solution du système de récurrence $X = H(X)$ et en même temps racine du système d'équations $F_q(X) = 0$.

L'ordre de convergence de la méthode traduit la rapidité du processus itératif ; il est déterminé en étudiant la convergence de la série que forment les quantités

$$\varepsilon_j^k = \alpha_j - X_j^k$$

appelées erreur type.

L'arrêt des calculs dépend essentiellement de la précision que l'on désire obtenir dans la résolution du système d'équations. Le critère de précision peut être indifféremment la valeur absolue de chaque fonction que l'on considère comme quantité négligeable ou la variation relative de chaque variable entre deux itérations successives.

Nous classerons les différentes méthodes de résolution en deux catégories suivant la nature de la fonction H(X) introduite dans le système de récurrence et ses relations avec les fonctions $F_q(X)$. C'est ainsi que nous distinguerons :

- Les processus pour lesquels H(X), de forme plus ou moins arbitraire, est déterminée directement à partir des fonctions $F_q(X)$ seules.

- Les processus pour lesquels H(X) est issu d'une transformation du système d'équations initial.

VI-1-2 Méthodes de résolution de la première catégorie

VI-1-2-1 Systèmes de récurrence à un point

VI-1-2-1-1 Méthode de substitution élémentaire

La relation de récurrence pour chaque variable x_i est directement déduite de la fonction $F_i(X)$ correspondante. C'est ainsi que l'on tire la variable x_1 de la première équation, x_2 de la deuxième et d'une façon générale, x_i de la i-ième.

Le système de récurrence que l'on obtient peut s'écrire :

$$(VI.5) \qquad X_i^{(k+1)} = G_i(X_1^{(k)}, X_2^{(k)}, \ldots, X_{i-1}^{(k)}, X_{i+1}^{(k)}, \ldots X_n^{(k)})$$

avec i = 1, 2, ..., n
et où k est le rang de l'itération.

Pour que le processus conduise à une solution, il est nécessaire que la matrice des dérivées partielles $\partial G_i / \partial x_i$ de chaque équation par rapport à chaque variable tende vers zéro, condition vérifiée lorsque toutes les valeurs propres ont des modules inférieurs à l'unité. (2)

La convergence est difficile à prévoir car d'une part, le calcul des valeurs propres d'une matrice est relativement complexe et d'autre part, il faut être sûr que le point de départ soit très près de la solution.

Remarque : On ne peut pas toujours exprimer simplement une variable x_i à l'aide de la formule (VI.5) dans laquelle G_i est indépendant de x_i. On laisse alors subsister x_i dans l'expression de G_i ce qui réduit vraisemblablement l'efficacité de la méthode mais ne nuit pas nécessairement à sa validité.

VI-1-2-1-2 Méthode de GAUSS-SEIDEL généralisée

Cette méthode qui est une généralisation de la méthode de GAUSS-SEIDEL utilisée pour la résolution des systèmes linéaires, constitue une amélioration du processus précédent.

Le calcul d'une variable x_i au cours d'une itération est faite en tenant compte des nouvelles valeurs des (i-1) premières variables déjà déterminées.

La formule d'itération devient :

$$(VI.6) \qquad X_i^{(k+1)} = G_i(X_1^{(k+1)}, X_2^{(k+1)}, \ldots, X_{i-1}^{(k+1)}, X_i^{(k)}, \ldots, X_n^{(k)})$$

Il s'agit d'un processus particulier car il fait appel à la composition des récurrences (3) ; un point d'itération est calculé à partir non seulement du point précédent mais également de ses propres coordonnées déjà déterminées.

VI-1-2-1-3 Méthode des parallèles

Elle repose sur l'utilisation d'un système de récurrence de forme générale :

$$(VI-7) \qquad X^{(k+1)} = H(X) = X^{(k)} - M^{-1}.F(X^{(k)})$$

On peut remarquer que dans le cas d'un problème à une dimension, $x^{(k+1)}$ correspond à l'intersection avec l'axe des x de la droite de pente m passant par le point P_k de coordonnées $(x^{(k)}, F(x^{(k)}))$. (1).

La matrice M est choisie arbitrairement au départ et reste invariable pour toutes les itérations successives ; c'est elle qui conditionne essentiellement la convergence du processus.

Le caractère aléatoire de la convergence initiale du système peut être supprimé en prenant pour M la matrice constituée des valeurs numériques des dérivées premières des fonctions au point de départ $X^{(0)}$. Cette amélioration correspond à une linéarisation des équations autour du point $X^{(0)}$, mais l'approximation ainsi réalisée n'est plus exacte pour les itérations suivantes, contrairement à ce que l'on obtient avec la méthode de NEWTON généralisée que nous décrirons par la suite.

Si l'on pose dans ce dernier cas :

$$(VI.8) \qquad X^{(k+1)} - X^{(k)} = \Delta X^{(k)}$$

le système de récurrence peut s'écrire :

$$(VI.9) \qquad \sum_{p=1}^{n} \Delta X_p^{(k)} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x_p} F_q(X) \right]_{X = X^{(k)}} = - F_q(X^{(k)})$$

avec $q = 1, 2, \ldots, n$

Sa résolution permet de déterminer l'accroissement de chaque variable entre deux itérations successives.

La méthode des parallèles présente une convergence linéaire.

VI-1-2-2 Méthodes à récurrence d'ordre multiple

VI-1-2-2-1 Méthode des sécantes (4)

Tandis que la méthode des parallèles repose sur la substitution d'une droite de pente arbitraire, à la courbe représentative de l'équation, pour résoudre un problème à une dimension, la méthode des sécantes consiste à remplacer la courbe par une sécante définie de façon paramétrique à partir des deux points d'intersection.

Considérons le cas général de la résolution d'un système de n équations à n inconnues. Chaque fonction $F_q(X)$ définit une surface dans un espace à (n+1) dimensions. Les coordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_n, F)$ d'un point de l'espace situé sur un hyperplan sécant peuvent être déterminées de façon paramétrique à partir de celles des (n+1) points qui définissent cet hyperplan en introduisant un ensemble de nombres π_j tels que :

$$\sum_{j=1}^{n+1} \pi_j = 1$$

il vient :

$$x_1^{(n+2)} = \pi_1 x_1^{(1)} + \pi_2 x_1^{(2)} + \ldots + \pi_{n+1} x_1^{(n+1)}$$

. . . . . .

$$x_n^{(n+2)} = \pi_1 x_n^{(1)} + \pi_2 x_n^{(2)} + \ldots + \pi_{n+1} x_n^{(n+1)}$$

et $$F^{(n+2)} = \pi_1 F_q(X^{(1)}) + \pi_2 F_q(X^{(2)}) + \ldots + \pi_{n+1} F_q(X^{(n+1)})$$

La méthode consiste à remplacer toutes les fonctions F_q par des hyperplans sécants et à rechercher le point solution de ce nouveau système, obtenu en résolvant le système linéaire de (n+1) équations en π_j.

$$(VI.10)\quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n+1} \pi_j = 1 \\ \sum_{j=1}^{n+1} \pi_j . F_q(X^{(j)}) = 0 \qquad \text{avec} \qquad q = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

et en appliquant le système de récurrence

$$(VI.11)\quad X^{(n+2)} = \pi_1 X^{(1)} + \pi_2 X^{(2)} + \ldots + \pi_{n+1} X^{(n+1)}$$

Il s'agit donc d'un processus à récurrence d'ordre n+1.

Lorsqu'un nouveau point est déterminé il suffit de supprimer le point le plus éloigné de la solution en prenant par exemple comme critère d'élimination la quantité :

$$\sum_{q=1}^{n} \left[F_q(X^{(j)}) \right]^2 \qquad \text{avec} \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

On abandonne le point pour lequel elle est maximale.

VI-1-2-2-2 Méthode de NEWTON modifiée

C'est une synthèse de la méthode précédente et de la méthode des parallèles. En effet, au lieu de substituer un hyperplan quelconque à la surface d'équation $F_q(X)$, on choisit le plus proche possible de l'hyperplan tangent au point d'itération envisagé.

Le problème est alors abordé de la même façon qu'avec la méthode des parallèles, en introduisant le système de récurrence (VI.7) :

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} - M^{-1} . F(X^{(k)})$$

Cependant la matrice M utilisée ici, est constituée de termes correspondant à des approximations des dérivées premières des fonctions

$F_q(X)$, calculées numériquement à partir des deux dernières itérations. Elle est modifiée à chaque pas de calcul.

Chaque terme est déterminé par une relation de la forme

(VI-12)

$$\frac{\Delta F_q(X^{(k)})}{\Delta x_q^{(k-1)}} = \frac{F_q(x_1^{(k)},\ldots,x_q^{(k)},\ldots,x_n^{(k)}) - F_q(x_1^{(k)},\ldots,x_q^{(k-1)},\ldots,x_n^{(k)})}{x_q^{(k)} - x_q^{(k-1)}}$$

Il s'agit d'un processus à récurrence d'ordre n+1 toutefois les n+1 points ne sont pas ceux qui ont été trouvés aux itérations précédentes ; ils sont tous calculés à partir des deux dernières itérations seulement.

On démontre que cette méthode a une convergence d'ordre 1,62 (3) ; elle est donc meilleure que les méthodes à convergence linéaire mentionnées auparavant.

VI-1-3 Processus basés sur une transformation préalable du système d'équations

Les systèmes de récurrence utilisés dans ces méthodes sont déterminés à partir du système d'équations modifié de façon à obtenir une meilleure convergence ou une simplification de la résolution.

VI-1-3-1 Méthode de SCHRODER

Soit les n fonctions :

(VI.13) $y_q = F_q(x_j)$ avec $j,q = 1,\ldots,n$

Considérons les inverses de ces fonctions

(VI.14) $x_j = G_j(y_q)$

La solution du système correspond à l'ensemble

$Y = 0$

Prenons le développement en série de TAYLOR autour d'un point de départ arbitraire P_k de coordonnées $y_q^{(k)}$.

On peut écrire sous forme symbolique :

$$(VI.15) \quad x_j = G_j(Y^{(k)}) + \sum_{p=1}^{n} (y_p - y_p^{(k)}) \cdot \left[\frac{\partial}{\partial y_p} G_j(Y) \right]_{Y = Y^{(k)}}$$

$$+ \frac{1}{2!} \sum_{p=1}^{n} \left[\left((y_p - y_p^{(k)}) \cdot \frac{\partial}{\partial y_p} \right)^2 G_j(Y) \right]_{Y = Y^{(k)}} + \ldots$$

La solution $X^{(k+1)}$ du système $Y = 0$ est donnée par les n relations :

$$x_j = G_j(0)$$

soit

$$(VI.16) \quad x_j^{(k+1)} = G_j(Y^{(k)}) - \sum_{p=1}^{n} y_p^{(k)} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial y_p} G_j(y) \right]_{Y = Y^{(k)}}$$

$$+ \frac{1}{2!} \sum_{p=1}^{n} \left[\left(y_p^{(k)} \cdot \frac{\partial}{\partial y_p} \right)^2 G_j(Y) \right]_{Y = Y^{(k)}} - \ldots$$

VI-1-3-1-1 Méthode générale de résolution

La méthode générale de SCHRODER consiste à ne considérer dans le second membre qu'un développement limité aux premiers termes de la série et à résoudre le système par approximations successives.

Il suffit de remplacer $G_j(Y^{(k)})$ par $x_j^{(k)}$ et $y_q^{(k)}$ par $F_q(X^{(k)})$ pour faire apparaître le système de récurrence de forme générale :

$$X^{(k+1)} = H(X^{(k)})$$

il vient :

(VI.17)

$$x_j^{(k+1)} - x_j^{(k)} = - \sum_{p=1}^{n} F_p(X^{(k)}) . \left[\frac{\partial}{\partial y_p} G_j(Y) \right]_{Y = Y^{(k)}}$$

$$+ \frac{1}{2!} \sum_{p=1}^{n} F_p(X^{(k)}) . \sum_{r=1}^{n} F_r(X^{(k)}) . \left[\frac{\partial^2}{\partial y_p \partial y_r} G_j(Y) \right]_{Y = Y^{(k)}} - \ldots$$

Ce processus a une convergence d'ordre élevé, égal au nombre de termes conservés au second membre, mais il nécessite des calculs analytiques et numériques extrêmement longs, complexes voire inextricables quand le nombre n de variables est grand.

Lorsqu'on prend le développement limité au terme du second ordre par exemple, il faut déterminer la valeur algébrique des termes $\partial G_j / \partial y_q$, coefficients de la matrice inverse de la matrice des dérivées partielles $\partial F_q / \partial x_j$, pour calculer ensuite les dérivées partielles de ces termes par rapport à chaque variable x_j (soit n^2 termes pour la matrice inverse et leurs n^3 dérivées partielles).

Cette méthode n'est pratiquement jamais utilisée avec d'autres termes de la série que le premier (3), auquel cas on obtient une généralisation de la méthode de NEWTON employée pour la résolution d'une équation non linéaire.

VI-1-3-1-2 Méthode de NEWTON généralisée

On considère le système de récurrence :

(VI.18) $$x_j^{(k+1)} = x_j^{(k)} - \sum_{p=1}^{n} F_p(X^{(k)}) . \left[\frac{\partial}{\partial y_p} G_j(Y) \right]_{Y = Y^{(K)}}$$

Remarque : Cette expression peut s'écrire sous forme symbolique

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} - M^{-1} . F(X^{(k)})$$

On constate alors une analogie avec la méthode des parallèles, cependant ici la matrice M, inverse de la matrice constituée des termes de la forme $\partial G_j / \partial y_q$, est la matrice des dérivées partielles $\partial F_q / \partial x_j$. Elle est modifiée à chaque itération.

Si l'on pose :

(VI.19) $$\Delta x_q^{(k)} = x_q^{(k+1)} - x_q^{(k)}$$

la méthode de NEWTON généralisée consiste à résoudre le système de récurrence linéaire en $\Delta X^{(k)}$

$$F'(X^{(k)}).\Delta X^{(k)} = - F(X^{(k)}) \qquad (VI.2)$$

On démontre qu'il s'agit d'un processus à convergence quadratique (3).

VI-1-3-2 Méthodes du gradient

VI-1-3-2-1 Principe général

Le principe de ces méthodes repose sur la transformation du système d'équations à résoudre en une fonction unique positive ou nulle.

On peut prendre pour cette fonction l'expression :

$$z(X) = \sum_q \left[F_q(X)\right]^2 \qquad (VI.21)$$

ou plus généralement

$$z(X) = \sum_{i\,j} a_{ij}.F_i.F_j$$

a_{ij} étant les éléments d'une matrice A définie positive.

Elle présente un minimum nul pour la solution du système initial. La méthode de résolution consiste donc à rechercher ce minimum.

La fonction z(X) est l'équation d'une surface dans un espace à n+1 dimensions. A toute valeur $X^{(k)}$ de la variable X de composantes $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ correspond un point d'ordonnée $z(X^{(k)})$ sur la surface, dont la projection sur l'hyperplan z = 0 donne le point de coordonnée $X^{(k)}$.

La surface z(X) est tangente à l'hyperplan de référence au point P solution et toute section droite z(X) = C^{te} peut y être représentéepar une courbe de niveau entourant P si z(X) est localement convexe près du minimum.

Soit un point $X^{(k)}$ et soit $V^{(k)}$ un vecteur d'origine $X^{(k)}$ et de direction quelconque par rapport à la courbe de niveau $z(X) = z(X^{(k)})$.

Considérons l'équation paramétrique du support du vecteur, de forme symbolique :

$$X = X^{(k)} + \mu V^{(k)} \qquad (VI.22)$$

Lorsqu'un point décrit cette droite, la fonction z passe par un minimum relatif qui correspond à la valeur μ_m de μ solution de l'équation non-linéaire :

$$\frac{\partial z(X)}{\partial \mu} = \sum_j v_j^{(k)} \cdot \frac{\partial z(X)}{\partial x_j} = 0 \qquad (VI.23)$$

Il suffit donc d'appliquer le système de récurrence :

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} + \mu_m . V^{(k)} \qquad (VI.24)$$

système linéaire qu'il faut résoudre à chaque itération après avoir calculé la nouvelle valeur du paramètre μ_m, à l'aide de l'équation (VI.23), compte tenu du vecteur V choisi.

D'une façon générale, l'équation (VI.23) sera elle aussi résolue à l'aide d'un calcul itératif ; il intervient donc dans cette méthode deux processus itératifs imbriqués l'un dans l'autre.

La recherche du minimum de z(X) est souvent complexe à mettre en oeuvre aussi est-il quelquefois plus intéressant de se contenter de trouver seulement un point $X^{(k+1)}$ pour lequel la fonction z(X) présente une valeur plus faible, en prenant un déplacement h arbitraire du point le long de la droite considérée, quitte à le diminuer par la suite si une trop grande variation initiale entraînait un dépassement excessif du minimum.

La convergence du processus dépend principalement du vecteur V que l'on prend à chaque pas de calcul. Il existe plusieurs possibilités de choix pour V, définissant par conséquent plusieurs méthodes particulières de la méthode du gradient.

VI-1-3-2-2 Différentes méthodes du gradient

1°) Méthode de la plus grande pente

On choisit le vecteur $V^{(k)}$ normal à la courbe de niveau $C^{(k)}$.

Il vient :

$$(VI.25) \quad V^{(k)} = \left[\frac{\partial z(X)}{\partial X} \right]_{X = X^{(k)}}$$

Cette méthode permet d'obtenir une convergence rapide mais elle implique la connaissance des valeurs numériques des dérivées partielles de la fonction, au point d'itération considéré.

2°) La méthode de LANCE

Elle consiste à ne prendre comme composantes du vecteur que des valeurs approchées des dérivées partielles, déterminées à partir d'une variation finie h de chaque variable et à introduire le même écart h du point $X^{(k)}$ sur la droite pour tenter de trouver une valeur de z(X) plus faible (opération remplaçant la recherche du minimum de z).

3°) Méthode de relaxation

On prend le vecteur $V^{(k)}$ parallèle à chacun des axes x_j pris les uns après les autres.

Dans la méthode de SOUTHWELL, l'ordre des axes qui fixent les directions successives du vecteur, est choisi en fonction des valeurs numériques des dérivées partielles dz/dX (on considère en priorité les variables prépondérantes).

4°) Méthodes des directions conjuguées

Elle consiste à prendre le vecteur $V^{(k)}$ suivant la direction du diamètre conjugué du plan tangent à la courbe au point $X^{(k)}$. Cette méthode revient à assimiler la surface à une ellipsoïde, approximation justifiée dans la mesure où elle correspond à une linéarisation des fonctions $F_q(X)$. Il existe une analogie avec la méthode de NEWTON.

VI-1-4 Choix d'un processus de calcul

Il est difficile de comparer tous ces processus de résolution du point de vue de leur efficacité puisqu'il faudrait faire une étude de leur convergence ce qui nous entraînerait dans des calculs complexes et d'ailleurs partiellement inutiles car la convergence n'est pas le seul critère à considérer. En effet comptent aussi, la quantité de calculs, tant analytiques que numériques, à mettre en oeuvre et surtout le domaine d'application qu'il est également impossible de déterminer dans le cas général.

Hormis l'importance des calculs exigés, seules des impressions personnelles compte-tenu du type d'équations à résoudre et l'expérience peuvent guider dans le choix d'une méthode.

Nous pouvons néanmoins tirer plusieurs conclusions : la méthode de substitution élémentaire, celle de GAUSS SEIDEL généralisée et celle des parallèles conduisent à des calculs très simples mais elles présentent vraisemblablement une efficacité et un champ d'application limités ; la méthode des sécantes donne de meilleurs résultats en contre partie d'une résolution un peu moins facile ; la méthode de NEWTON généralisée est plus intéressante, puisqu'elle correspond à une convergence quadratique,bien qu'elle nécessite la détermination de toutes les dérivées partielles des fonctions par rapport à toutes les inconnues ; dans sa version modifiée les dérivées sont évaluées numériquement à l'aide de l'ordinateur mais cette simplification des calculs préliminaires s'accompagne d'une diminution de la convergence ; les méthodes du gradient sont plus générales dans la mesure où elles ont un domaine de convergence plus étendu cependant les processus de résolution auxquels elles font appel sont plus complexes et probablement moins rapides.

En résumé, la méthode de NEWTON généralisée semble correspondre au meilleur compromis entre l'efficacité, l'importance du calcul algébrique et la quantité de calculs numériques ; c'est celle que nous avons choisie malgré l'existence d'un processus de résolution par une méthode du gradient, dans la bibliothèque de sous programmes de l'ordinateur I. B. M. 360 44 dont nous disposions (5). En effet, connaissant au départ l'ordre de grandeur des inconnues, nous avons préféré utiliser cette méthode mieux adaptée à notre problème particulier car elle est plus rapide, ce qui constitue un avantage certain compte tenu du grand nombre de résolutions successives que demande l'optimalisation complète et elle permet en même temps d'aborder simplement le calcul de la probabilité de fonctionnement du montage optimalisé, comme nous le verrons par la suite.

La méthode de NEWTON, de même que toutes les autres méthodes, nécessite la résolution d'un système d'équations linéaires à chaque itération, c'est pourquoi nous allons aborder ce problème.

VI-2 RESOLUTION D'UN SYSTEME D'EQUATIONS LINEAIRES

Il s'agit là d'un problème bien connu que permettent de résoudre de nombreuses méthodes ; les une directes, les autres itératives.

Les processus de calculs itératifs sont beaucoup plus longs que les calculs directs sans pour autant conduire à une meilleure précision (2), c'est pourquoi nous n'en parlerons pas.

Nous allons décrire brièvement les principales méthodes de résolution directes afin de pouvoir justifier le choix de l'une d'entre-elles.

Soit un système de n équations à n inconnues :

$$\text{(VI-26)} \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} . x_j = b_i \qquad \text{avec} \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

que l'on peut écrire sous forme matricielle

$$\text{(VI-27)} \qquad A.X = B$$

expression dans laquelle A est la matrice carrée des coefficients, X et B, les matrices colonnes des inconnues et des termes indépendants.

VI-2-1 Principales méthodes de résolution directe

VI-2-1-1 Résolution analytique directe

Si le déterminant Δ de la matrice A est différent de zéro, la solution peut s'écrire :

$$\text{(VI-28)} \qquad x_j = \frac{\Delta j}{\Delta}$$ où Δ_j est le déterminant de la matrice obtenue à partir de A en remplaçant les termes de la colonne j par ceux de la matrice colonne B.

Elle peut s'exprimer directement sous forme matricielle en multipliant les deux membres de l'équation (VI-27) par A^{-1}.

$$\text{(VI-29)} \qquad X = A^{-1}.B$$

Soit c_{ji} les termes de la matrice inverse A^{-1}

Il vient :

$$\text{(VI-30)} \qquad x_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ji} . b_i$$

Cette méthode de résolution est facilement applicable lorsque le nombre n d'inconnues est faible mais elle est déconseillée dans le cas contraire car elle nécessite le calcul de (n+1) déterminants d'ordre n ce qui est une opération longue, même si l'on dispose d'un calculateur.

VI-2-1-2 Transformation en matrice diagonale

Cette méthode repose sur la transformation de la matrice A en une matrice diagonale. Pour cela, on divise l'équation de rang k par le coefficient a_{kk} de x_k et l'on en tire x_k que l'on porte dans les autres équations. En répétant l'opération successivement pour chaque équation on obtient une nouvelle matrice des coefficients dont les termes sont tous nuls sauf ceux de la diagonale principale qui sont égaux à l'unité (matrice unité).

La nouvelle expression du système, UX = B, permet de calculer facilement les inconnues.

C'est une transformation progressive que l'on effectue en travaillant toujours sur le même tableau. On démontre qu'elle nécessite approximativement $n^3/2$ opérations élémentaires du type multiplication ou division, lorsque n est grand. Remarquons enfin qu'elle n'est applicable que si les coefficients a_{kk}, appelés pivots de la décomposition, ne sont pas nuls.

VI-2-1-3 Transformation en matrice triangulaire

Cette méthode de résolution ressemble à la précédente mais on transforme ici les équations dans l'ordre et l'on ne substitue les variables que dans les équations non encore traitées.

Le processus de calcul est donc le suivant : on divise la première équation par le coefficient a_{11} ; on tire la variable x_1 afin de la substituer dans les (n-1) équations restantes puis l'on divise la deuxième équation par a_{22}, l'on en tire x_2 que l'on substitue dans les (n-2) équations restantes et ainsi de suite.

On obtient le système :

(VI-31) $S.X = B'$

où S est une matrice triangulaire supérieure dont tous les termes de la diagonale sont égaux à l'unité.

Il suffit alors, pour trouver la solution, de calculer x_n dans l'équation n puis x_{n-1} dans l'équation n-1 après substitution de x_n ... etc.

C'est la méthode de triangularisation par étapes. Elle est plus rapide que la précédente puisqu'elle ne nécessite que $n^3/3$ opérations environ, mais son utilisation est subordonnée à la même condition sur les pivots de la décomposition.

VI-2-1-4 Décomposition triangulaire de la matrice

On démontre qu'il est possible de décomposer d'une manière unique une matrice carrée A en un produit de deux matrices triangulaires L et S, où L est la matrice triangulaire inférieure avec des éléments quelconques sur la diagonale principale et S la matrice supérieure avec des termes égaux à l'unité sur la diagonale.

Le système (VI-27) peut donc s'écrire, compte tenu de la relation A = L.S :

(VI-33) $S.X = L^{-1}.B = B'$

S est la matrice introduite dans la triangularisation par étapes et le procédé de calcul des inconnues après transformation de la matrice est identique.

Les éléments des matrices S, L et B' peuvent être déterminés par identification ce qui donne un algorithme plus simple que pour la triangularisation par étapes alors que le nombre d'opérations élémentaires reste le même.

Nous verrons par la suite que lorsqu'elles sont appliquées dans un ordre déterminé, les équations de transformation des différents éléments de la matrice permettent de calculer les nouveaux éléments et de les substituer aux précédents sans qu'il soit nécessaire de transcrire des résultats intermédiaires. Comme d'autre part il n'est pas nécessaire de consigner les éléments de la diagonale de S(tous égaux à l'unité), les nouvelles matrices S, L et B' peuvent être stockées à la place de A et B et il est possible de former le nouveau tableau à la place de l'original par destruction progressive de celui-ci.

Signalons enfin qu'il existe, ici aussi, la condition sur les pivots de la décomposition.

Remarque : Si la matrice A est symétrique la méthode de résolution peut être simplifiée de différentes façons ; la méthode de SHOLESKI

(2) ou de la racine carrée, en est une. Elle tient compte du fait que la matrice peut alors être décomposée en deux matrices triangulaires dont l'une est la transposée de l'autre.

VI-2-1-5 Transformation en matrice semi-orthogonale

La matrice des coefficients A est décomposée en produit d'une matrice triangulaire inférieure L avec des termes égaux à l'unité sur la diagonale, par une matrice semi-orthogonale N.

Le système A.X = B peut donc s'écrire

(VI-34) $N.X = L^{-1}.B = B''$

soit

(VI-35) $X = N^{-1}.B''$

Remarque : L'inverse de la matrice N peut être calculé simplement à partir de sa transposée N^T puisque par définition d'une matrice semi-orthogonale ; on a la relation :

$N.N^T = D$ où D est diagonale.

Cette méthode est beaucoup plus longue que les précédentes (n^3 opérations environ) et nécessite davantage de places en mémoire. Son seul intérêt réside dans le fait qu'elle n'est pas astreinte à la condition sur les pivots.

VI-2-2 Comparaison des différentes méthodes de résolution

Nous n'avons décrit ici que les principales méthodes de résolution. Il en existe d'autres mais dont la plupart ne constituent que des cas particuliers, ou de simples améliorations apportées aux méthodes générales pour adapter le processus de calcul aux moyens dont on dispose.

VI-2-2-1 Condition de validité

Les processus d'inversion de matrice et de décomposition en matrice semi-orthogonale sont toujours applicables et donnent toujours des résultats. Par contre, les méthodes de diagonalisation et de triangularisation ne sont utilisables qu'avec restriction : il ne faut pas que les pivots de la décomposition s'annulent en cours de calcul. Cette condition est impérative mais

elle ne constitue pas un obstacle majeur car lorsqu'elle n'est pas vérifiée, il est toujours possible de permuter soit deux colonnes de la matrice et les deux inconnues correspondantes, soit plus simplement deux lignes de façon à éliminer ce défaut.

VI-2-2-2 Importance des calculs - Encombrement en mémoire

L'inversion d'une matrice exige un nombre d'opérations considérable voire prohibitif. D'autre part, quand elle est réalisée à l'aide d'une machine à mémoire, elle occupe une place importante car il faut transcrire dans un deuxième tableau les éléments calculés à partir du premier.

La transformation en matrice semi-orthogonale nécessite, elle aussi, un nombre élevé d'opérations (pratiquement n^3 lorsque n est grand) et un encombrement important en mémoire.

La diagonalisation d'une matrice est accomplie en $n^3/2$ opérations environ tandis que les deux méthodes de triangularisation mettent en jeu approximativement $n^3/3$ opérations ; ce sont les plus rapides.

Les trois dernières méthodes présentent en outre l'avantage de n'occuper qu'une place réduite en mémoire dans un calculateur électronique. Il suffit d'un tableau de dimensions n(n+1) pour stocker la matrice carrée A et la matrice colonne B et pour faire les calculs, car le processus mis en jeu permet de modifier progressivement ces matrices sans qu'il soit nécessaire de transcrire des résultats intermédiaires.

VI-2-2-3 Précision sur les résultats

La précision dépend des erreurs d'"arrondi" inhérentes à la nécessité d'effectuer les calculs avec un nombre limité de chiffres significatifs. Elle est également liée au processus de calcul adopté. C'est ainsi qu'un pivot de faible valeur constitue une source d'erreur importante dans la résolution par triangularisation ou diagonalisation des matrices.

Nous pouvons noter une particularité des méthodes de triangularisation ; les inconnues du système ne sont pas déterminées avec la même précision. L'erreur sur le calcul des variables est sensiblement la même que celle obtenue par diagonalisation pour x_n mais elle croît au fur et à mesure que le rang de l'inconnue diminue.

En effet, une inconnue x_j est calculée à partir des variables de rang supérieur, déjà déterminées, à l'aide d'une expression de la forme :

$$(VI\text{-}36) \qquad x_j = s_{j(n+1)} - \sum_{p=j+1}^{n} s_{jp}.x_p$$

L'imprécision sur x_n se répercute sur x_{n-1} puis sur x_{n-2} et ainsi de suite.

Dans ces conditions on obtient pour x_j une addition des erreurs absolues sur les différentes inconnues x_p, si bien que l'erreur relative peut atteindre une valeur importante, d'autant plus grande que x_j est faible devant les quantités :

$$s_{j(n+1)} \quad \text{et} \quad \sum_{p=j+1}^{n} s_{jp}.x_p$$

On dit, dans ce cas, que le système est mal conditionné.

La diminution de précision avec le rang de l'inconnue est au contraire limitée si :

$$\sum_{p=j+1}^{n} s_{jp}.x_p \ll s_{j(n+1)}$$

condition qui nous incite à choisir la structure du système de façon que la matrice des coefficients A ait une configuration la plus proche possible de celle d'une matrice diagonale.

VI-2-2-4 Conclusion

Les méthodes de résolution par triangularisation sont les plus rapides et les moins encombrantes au point de vue place en mémoire. Il ne faut cependant pas oublier qu'elles sont astreintes à une condition sur les pivots (comme la méthode de diagonalisation) et surtout qu'elles présentent l'inconvénient de ne pas donner une très bonne précision sur les premières inconnues lorsque le système est mal conditionné. Parmi celles-ci, la triangularisation directe conduit à un algorithme un peu plus simple que la triangularisation par étapes.

Remarque : Il existe un processus de résolution par diagonalisation de la matrice, dans la bibliothèque de sous programmes de l'ordinateur (5). Ce sous programme, prévu pour être utilisé de façon générale sans aucune condition préalable sur le système d'équations, comporte des tests sur les pivots et des permutations du système à chaque itération, ce qui ne peut que ralentir le processus, déjà intrinsèquement plus long que la triangularisation. Comme cette résolution est abordée un très grand nombre de fois au cours de l'optimalisation, nous avons préféré en écrire nous-mêmes un algorithme simple en prévoyant un conditionnement initial du système linéaire.

VI-3 MISE EN OEUVRE DE LA METHODE DE NEWTON GENERALISEE

VI-3-1 Algorithme de résolution

Le système d'équations non linéaires étant exprimé sous la forme (VI-2) :

$$F_q(X) = 0 \qquad \text{avec} \qquad q = 1, 2, \ldots, n$$

le processus de calcul consiste à appliquer le système de récurrence (VI-20) que l'on peut écrire explicitement :

$$\text{(VI-37)} \qquad \sum_{p=1}^{n} (x_p^{(k+1)} - x_p^{(k)}) \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x_p} F_q(X) \right]_{X = X^{(k)}} = - F_q(X^{(k)})$$

$$\text{avec} \quad q = 1, 2, \ldots, n$$

De par son principe, la méthode nécessite la résolution d'un système d'équations linéaires différent à chaque itération, les coefficients de la matrice étant calculés chaque fois à partir des résultats précédents.

Le processus est interrompu lorsque la solution est atteinte avec une précision jugée suffisante, ce qui se produit quand les quantités

$$F_q(X^{(k)}) \qquad \text{et} \qquad (x_p^{(k+1)} - x_p^{(k)})$$

sont voisines de zéro.

La valeur absolue de $F_q(X^{(k)})$ peut servir de critère d'arrêt des calculs quand on est en mesure de préciser avec quelle marge d'erreur on veut vérifier l'équation $F_q(X) = 0$. Dans le cas contraire, seule la valeur relative

$$\frac{x_p^{(k+1)} - x_p^{(k)}}{x_p^{(k)}}$$ peut donner une indication sur la

précision avec laquelle la solution est atteinte, à condition toutefois que la convergence du processus soit régulière et suffisamment rapide.

VI-3-2 Résolution du système linéaire - algorithme du processus de triangularisation directe de la matrice des coefficients.

Nous devons résoudre un système d'équations linéaires dont les inconnues ne sont pas directement les variables $x_j^{(k)}$ du système non linéaire, mais l'écart :

$$\Delta x_j^{(k)} = x_j^{(k+1)} - x_j^{(k)}$$

entre les résultats de deux itérations successives.

L'erreur sur le calcul de Δx_j n'a donc aucune répercussion sur la précision du résultat définitif ; elle risque seulement d'influencer la convergence du processus itératif.

La résolution du système linéaire est renouvelée à chaque itération c'est pourquoi nous avons choisi la méthode de triangularisation directe qui est la plus rapide, la plus simple à mettre en oeuvre et qui prend le moins de place en mémoire dans un calculateur.

Il faut noter cependant qu'il sera nécessaire de conditionner le système pour éviter de rencontrer des pivots nuls en cours de calcul et aussi pour que l'erreur sur les inconnues ne soit pas excessive. Une erreur supérieure à 100 % sur l'une des variables entraînerait immanquablement la divergence du processus itératif.

La matrice A des coefficients est décomposée en produit d'une matrice triangulaire inférieure L par une matrice triangulaire supérieure S dont les éléments de la diagonale sont égaux à l'unité.

$$L = \begin{vmatrix} \ell_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \ell_{21} & \ell_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \dots & \ell_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad S = \begin{vmatrix} 1 & S_{12} & \dots & S_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & S_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & S_{(n-1)n} \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

Cette décomposition étant unique, on peut identifier les termes du produit aux coefficients a_{ij} de A ; nous obtenons ainsi les relations :

$$\text{(VI-38)} \qquad \ell_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} \ell_{ip} . s_{pj} \qquad \text{avec } i = 1, \dots, j$$

$$\text{(VI-39)} \qquad s_{ij} = \frac{1}{\ell_{ij}} . \left(a_{ij} - \sum_{p=1}^{i-1} \ell_{ip} . s_{pj}\right) \qquad \text{avec } j = (i+1), \dots n$$

Pour déterminer les inconnues suivant le principe de la triangularisation, il faut écrire le système sous la forme (VI-33)

$$S.X = L^{-1}.B = B'$$

Cependant, il n'est pas indispensable de calculer la matrice inverse L^{-1} pour en déduire les coefficients β_j de la matrice colonne B' ; on peut opérer par identification compte tenu de la relation L.B' = B.

Il vient :

$$\ell_{11} . \beta_1 = b_1$$

$$\ell_{21} . \beta_1 + \ell_{22} . \beta_2 = b_2$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\ell_{i1} . \beta_1 + \ell_{i2} . \beta_2 + \dots + \ell_{ii} . \beta_i = b_i$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\ell_{n1} . \beta_1 + \ell_{n2} . \beta_2 + \dots + \ell_{ni} . \beta_i + \dots + \ell_{nn} . \beta_n = b_n$$

D'où l'on tire la relation générale :

$$\beta_i = \frac{1}{\ell_{ii}} \cdot (b_i - \ell_{i1}.\beta_1 - \ell_{i2}.\beta_2 - \ldots - \ell_{i(i-1)}.\beta_{(i-1)})$$

soit

$$\text{(VI-40)} \qquad \beta_i = \frac{1}{\ell_{ii}} \cdot \left(b_i - \sum_{p=1}^{i-1} \ell_{ip}.\beta_p\right) \qquad \text{avec} \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

Ce sont les coefficients $s_{i(n+1)}$, calculés à l'aide de la formule (VI-39), d'une colonne supplémentaire j = n+1 rajoutée à la matrice précédente et dont les éléments étaient initialement égaux à $a_{i(n+1)} = b_i$, éléments de la matrice colonne B.

Les relations (VI-40) ne conduisent à des résultats que si les termes ℓ_{ii} ne sont pas nuls ; c'est la condition, déjà mentionnée, sur les pivots de la décomposition.

Si l'on élimine la diagonale de S qu'il n'est pas nécessaire de mettre en mémoire, les matrices S, L et B' peuvent être déduites des matrices A et B et stockées dans le même tableau par une transformation progressive de celui-ci.

$$\left|\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & b_n \end{array}\right| \longrightarrow \left|\begin{array}{cccc|c} \ell_{11} & s_{12} & \ldots & s_{1n} & s_{1(n+1)} \\ \ell_{21} & \ell_{22} & \ldots & s_{2n} & s_{2(n+1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \ldots & \ell_{nn} & s_{n(n+1)} \end{array}\right|$$

Il suffit pour cela d'appliquer successivement les deux relations :

$$\text{(VI-41)} \qquad \ell_{qr} = a_{qr} - \sum_{p=1}^{r-1} \ell_{qp}.s_{pr}$$

$$\text{(VI-42)} \qquad s_{r(q+1)} = \frac{1}{\ell_{rr}} \cdot \left[a_{r(q+1)} - \sum_{p=1}^{r-1} \ell_{rp}.s_{p(q+1)}\right] \quad \text{avec } r = 1,\ldots,n \quad \text{et } q = r,\ldots,n$$

On calcule d'abord la première colonne de L et la première ligne de S puis la deuxième colonne de L et la deuxième ligne de S et ainsi de suite.

Lorsque la décomposition est terminée, on peut en déduire les inconnues Δx_j par les relations :

$$\Delta x_n = s_{n(n+1)}$$

$$\Delta x_{(n-1)} = s_{(n-1)(n+1)} - s_{(n-1)n}.\Delta x_n$$

.....

$$\Delta x_1 = s_{1(n+1)} - s_{12}.\Delta x_2 - s_{13}.\Delta x_3 - \ldots - s_{1n}.\Delta x_n$$

D'où l'on tire la formule générale :

$$\Delta x_j = s_{j(n+1)} - \sum_{p=j+1}^{n} s_{jp}.\Delta x_p \qquad \text{avec } j = n, n-1, \ldots, 1$$

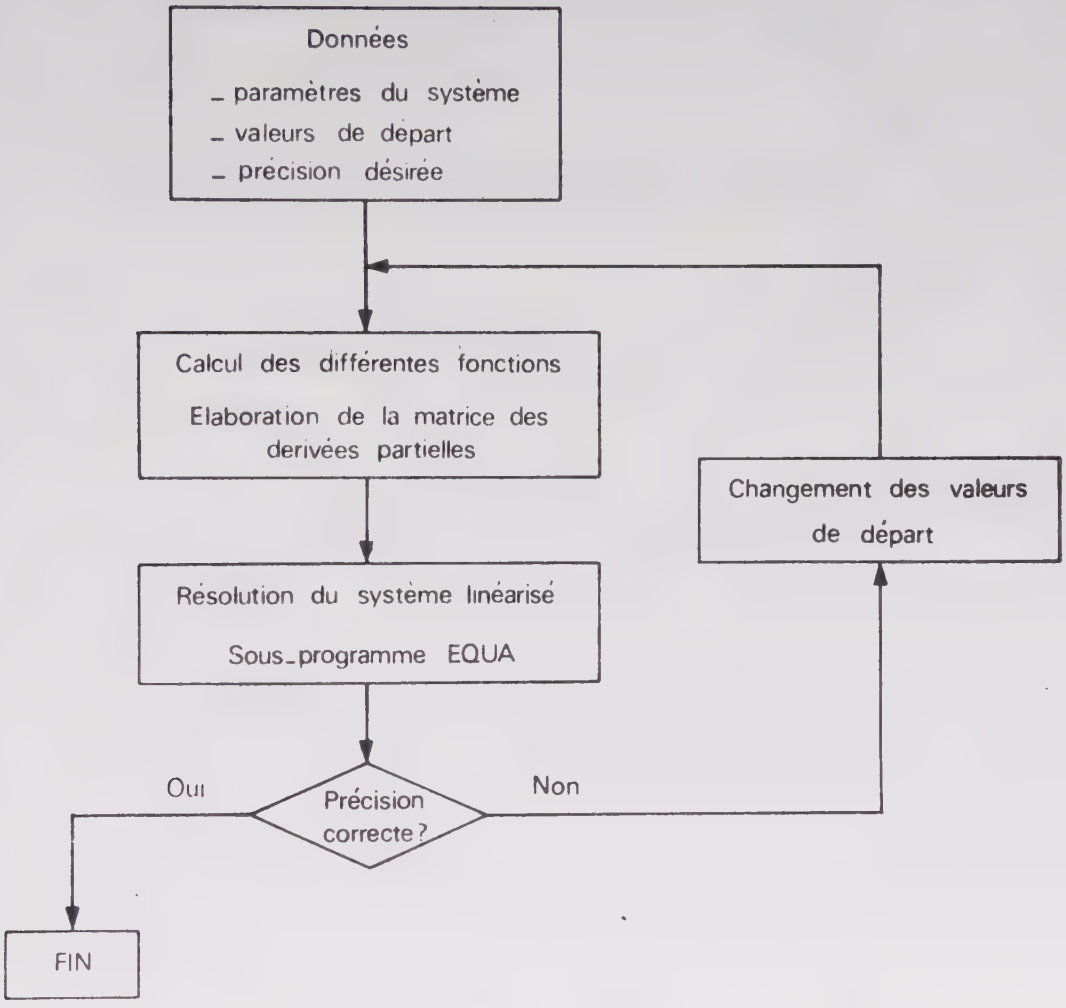
VI-3-3 Processus du calcul numérique

Les considérations précédentes sur la méthode de NEWTON généralisée nous ont conduit à élaborer le processus de calcul représenté par l'organigramme de la page 141

Les valeurs numériques que présentent les différentes fonctions $F_q(X)$ du système d'équations et leurs dérivées partielles pour les valeurs de départ $x_j^{(0)}$ choisies sont calculées à partir des coefficients et stockées dans un tableau de dimensions n.(n+1). Un sous-programme (EQUA) dont l'organigramme est donné en annexe, permet ensuite de résoudre le système linéaire en $\Delta x_j^{(1)}$ par la méthode de triangularisation directe décrit auparavant.

Un test de précision est alors effectué soit sur les fonctions $F_q(x_j)$, soit sur les quantités $\Delta x_j^{(1)}/x_j^{(0)}$; s'il n'est pas bon, on recommence le processus en prenant comme nouvelles valeurs de départ, les quantités $x_j^{(1)} = x_j^{(0)} + \Delta x_j^{(1)}$ déduites de la résolution précédente.

La convergence du processus itératif sera d'autant plus rapide que le système d'équations sera bien conditionné, c'est-à-dire que les termes de la diagonale de la matrice des coefficients auront des valeurs relatives importantes ("matrice pseudo-diagonale").



ORGANIGRAMME DE RESOLUTION

BIBLIOGRAPHIE

(1) E. DURAND

Solutions numériques des équations algébriques - Tome I - Ed. Masson - 1960.

(2) E. DURAND

Solutions numériques des équations algébriques - Tome II - Ed. Masson - 1961.

(3) A. KORGANOFF

Méthodes de calcul numérique - Tome I - Ed. Dunod - Paris - 1961.

(4) P. WOLFE

The secant method for simultaneous nonlinear equations. Comm. Of the A.C.M. - Vol. 2 - pp. 12-13 - décember 1959.

(5) System/360 Scientific Subroutine Package (360 A-CM-03 X) Version II - Programmer's Manual. IBM Application Program.

CHAPITRE VII

OPTIMALISATION DE LA DECADE A DIODES TUNNEL

L'optimalisation de la décade à diodes tunnel est réalisée à partir du schéma de principe établi au chapitre II. Elle concerne essentiellement le fonctionnement en régime statique de ce montage logique et porte sur la plage de température choisie comme critère.

Il ne peut être envisagé d'adjoindre l'optimalisation du fonctionnement en régime dynamique à cette étude mathématique car elle met en jeu des éléments réactifs parasites mal connus et d'ailleurs impossibles à prévoir a priori pour le montage dans sa version définitive. Cependant, celle-ci a été abordée de façon expérimentale, lors de la mise au point du schéma de principe et l'on en tient compte dans l'établissement des conditions de fonctionnement sous forme de paramètres restrictifs et de contraintes supplémentaires imposées au montage.

VII-1 SCHEMA DE PRINCIPE

Le schéma de principe d'un étage de la décade est représenté sur la figure VII.1.

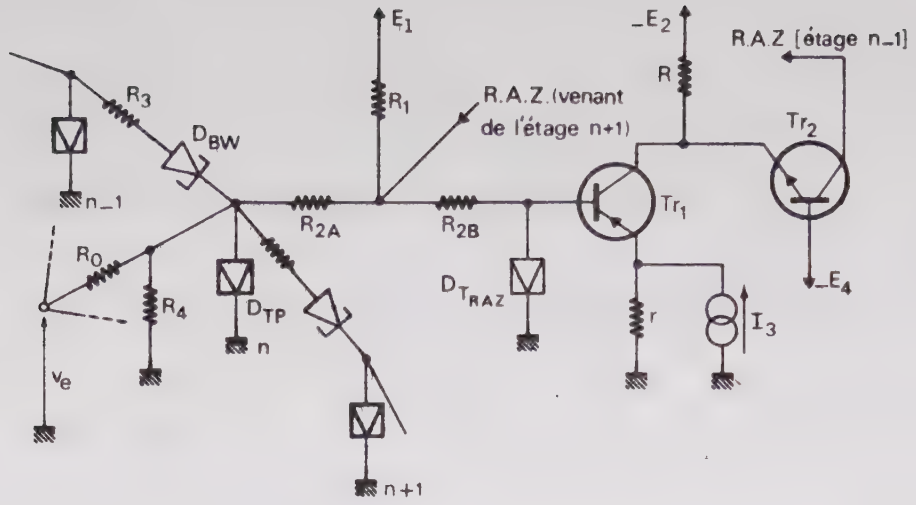


Figure VII-1 Etage de la décade à diodes tunnel.

La résistance R_4 simule l'impédance de tout circuit de charge destiné à la prise d'information au niveau de l'étage bistable à diode tunnel. S'il n'en existe pas, il suffit de prendre $G_4 = \frac{1}{R_4} = 0$.

VII-2 PARAMETRES DU MONTAGE - MODELE MATHEMATIQUE

Afin de pouvoir établir un modèle mathématique approprié à l'étude envisagée, il est nécessaire de définir tous les paramètres qui permettent de traduire le comportement des composants en régime statique.

VII-2-1 Les sources d'alimentation

Les tensions E_1 et E_2 sont fournies par des alimentations régulées identiques avec une précision relative $\frac{\Delta E}{E}$ (compte tenu de la dérive).

La tension E_4 est obtenue avec une précision relative $\frac{\Delta E_4}{E_4}$ différente de $\frac{\Delta E}{E}$ lorsqu'on utilise un diviseur potentiométrique alimenté à partir de E_2.

Le courant I_3 est fourni avec une incertitude $\frac{\Delta I_3}{I_3}$. En pratique $\Delta I_3/I_3$ est une fonction de $\frac{\Delta E}{E}$ et de $\frac{\Delta R}{R}$, tolérances sur les résistances, car le générateur de courant est réalisé à partir d'une tension d'alimentation et d'une résistance.

VII-2-2 Les résistances

Elles peuvent être classées en deux catégories :

- Celles qui doivent posséder une très bonne réponse en régime impulsionnel comme R_0, R_{2A}, R_{2B}, R_3, R_4, r. Ce sont des résistances au carbone, de précision $\Delta r/r$.

- Celles qui servent à polariser le montage en courant continu comme R_1 et R ; leurs valeurs, fonctions des tensions E_1 et E_2, doivent être très grandes. Comme elles ne jouent aucun rôle en régime impulsionnel, il est possible de prendre des résistances bobinées de précision. Ces dernières présentent non seulement une faible tolérance $\Delta R/R$ mais aussi un comportement plutôt inductif que capacitif ce qui se révèle bénéfique pour le fonctionnement du montage en régime dynamique (inductance de choc).

VII-2-3 Le générateur de commande

Il fournit des impulsions d'amplitude V_e avec une tolérance $\frac{\Delta V_e}{V_e}$.

Pour plus de simplicité dans les calculs, nous considérerons l'impulsion de courant correspondante $i = V_e/R_0$ et sa tolérance :

$$\frac{\Delta i}{i} = \frac{\Delta V_e}{V_e} + \frac{\Delta r}{r}$$

VII-2-4 Les composants actifs

Leur comportement en régime statique est défini par différents paramètres mesurés directement sur leurs caractéristiques,

VII-2-4-1 Valeurs moyennes et tolérances des paramètres

Les valeurs moyennes et les tolérances des différents paramètres d'un élément sont déterminées graphiquement à partir des courbes extrêmes tracées de façon à encadrer toutes les caractéristiques des composants d'un même lot. C'est en réalité une surface de dispersion appelée quelquefois un gabarit, que l'on doit définir comme l'indique la figure VII,2 dans le cas d'une diode tunnel.

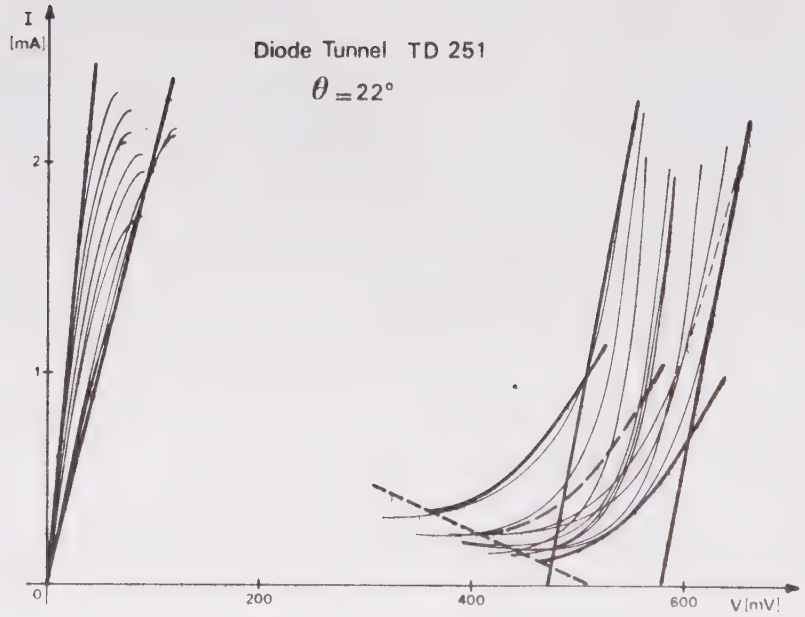


Figure VII-2 Exemple de détermination des valeurs moyennes des paramètres et de leurs tolérances pour un lot de diodes tunnel.

VII-2-4-2 Les diodes tunnel

Nous définirons la caractéristique statique de la diode tunnel principale DT_p ou celle de la diode tunnel de remise à zéro DT_{raz} par :

- Le courant de pic I_p ou I_{pr} avec une tolérance $\Delta I_p/I_p$ ou $\Delta I_{pr}/I_{pr}$.
- La tension de pic V_p.
- La résistance r_1 ou r_2, équivalente à la diode polarisée dans la zone de bas potentiel et obtenue par linéarisation de la caractéristique, avec une tolérance $\Delta r_1/r_1$ ou $\Delta r_2/r_2$.
- Le courant de vallée I_v ou I_{vr} avec une tolérance $\Delta I_v/I_v$ ou $\Delta I_{vr}/I_{vr}$.
- La tension de vallée V_v ou V_{vr} avec une tolérance $\Delta V_v/V_v$ ou $\Delta V_{vr}/V_{vr}$.
- Les paramètres relatifs à la région de vallée.

On obtient une bonne approximation par linéarisation de la caractéristique dans la zone de haut potentiel et de courant élevé (figure VII.3.b). Il apparaît ainsi deux nouveaux paramètres, coefficients de l'équation simplifiée :

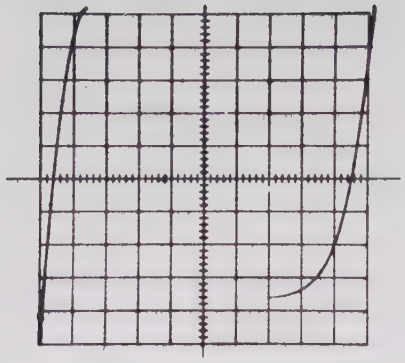
$$V = V_z + R_z I$$

V_z étant défini avec une tolérance $\Delta V_z/V_z$.

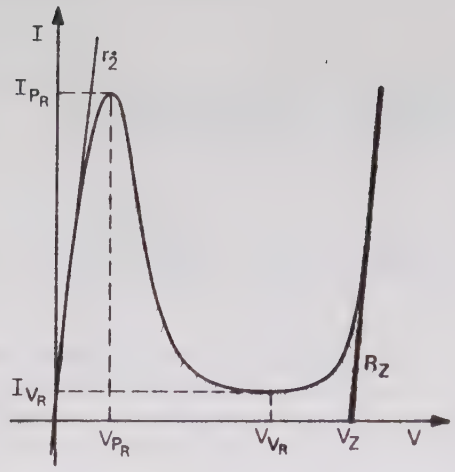
Nous négligerons les variations $\Delta R_z/R_z$ car cette simplification n'entraîne qu'une très légère majoration de la zone de dispersion pour le lot de diodes tunnel dont nous disposons.

Cette linéarisation de la caractéristique que l'on peut voir sur la figure VII.3, a été utilisée pour la diode tunnel DT_{raz} de remise à zéro, car celle-ci est peu chargée dans le montage.

Dans la zone de haut potentiel et de faible courant, la caractéristique de la diode tunnel est assimilable à une exponentielle si bien qu'une approximation linéaire n'est plus suffisante. Cependant, lorsqu'il est possible de prévoir l'emplacement approximatif du point de fonctionnement, seule une faible portion de la courbe nous intéresse et l'on peut la remplacer par une parabole.

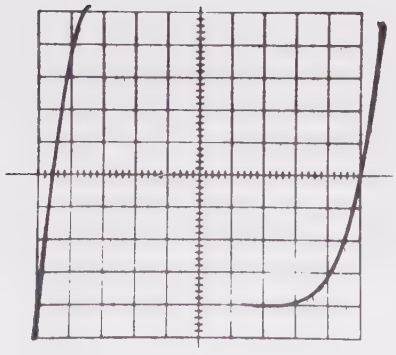


a) caractéristique réelle de la diode G.E. TD 715
échelle horiz. : 50 mV/car.
échelle vert. : 0,2 mA/car.

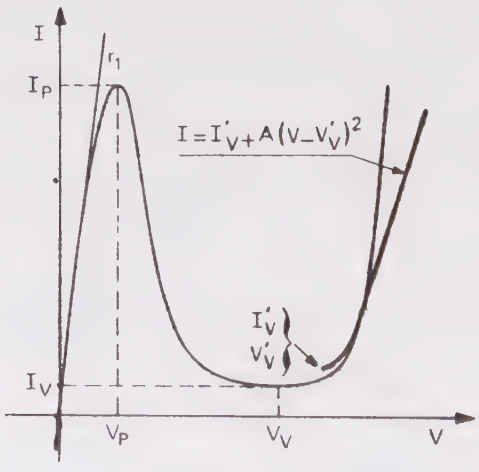


b) caractéristique théorique et linéarisation

Figure VII-3 Paramètres de la diode tunnel de remise à zéro (D_{TRAZ})



a) caractéristique réelle de la diode RCA 40572
échelle horiz. : 50 mV/car.
échelle vert. : 1 mA/car.



b) caractéristique théorique

Figure VII-4 Paramètres de la diode tunnel principale (D_{TP})

Il vient l'équation simplifiée de la caractéristique :

$$I = I'_v + A.\ (V - V'_v)^2$$

définie par les trois coefficients I'_v, V'_v et A.

Les dispersions $\Delta I'_v/I'_v$ et $\Delta V'_v/V'_v$ mesurées graphiquement sont en partie liées comme le sont d'ailleurs $\Delta I_v/I_v$ et $\Delta V_v/V_v$ ce que l'on peut observer sur la figure VII.2. D'autre part les variations de A seront négligées comme celles de R_z et pour les mêmes raisons.

Nous avons introduit cette approximation quadratique de la caractéristique représentée sur la figure VII.4, pour la diode tunnel principale DT_p de la décade.

Coefficients en température

Des mesures expérimentales nous ont confirmé que la température influence peu le pic de la diode tunnel et par suite r_1 (l'effet tunnel est dû à un courant de porteurs majoritaires), tandis qu'elle modifie sensiblement la vallée.

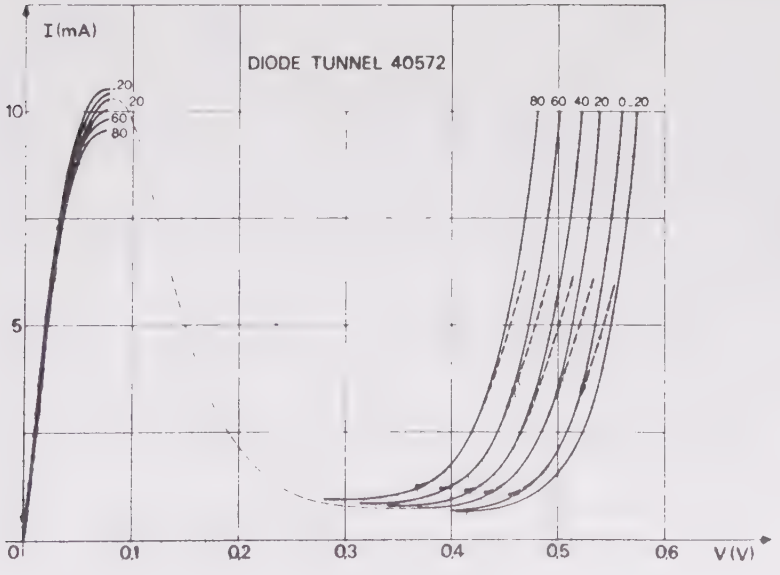


Figure VII-5 Variations de la caractéristique d'une diode tunnel en fonction de la température exprimée en °C.

Il faut toutefois noter que les variations de I_v sont liées à celles de V_v par une relation pratiquement linéaire de la forme.

$$I_v = \alpha - \delta V_v$$

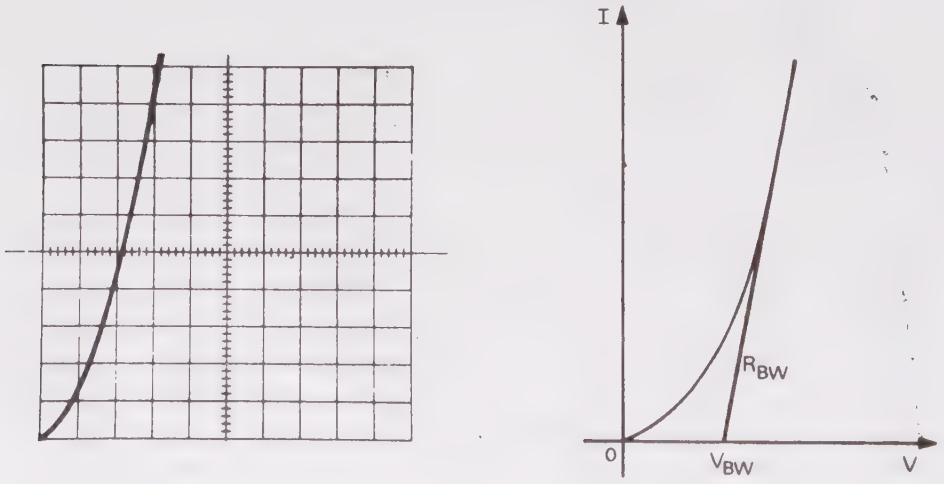
Nous introduirons les coefficients en température a_{Ip} sur I_p, a_{Iv} sur I_v et a_v sur V_v par contre nous négligerons les variations de r_l qui sont faibles en réalité devant l'incertitude sur ce paramètre.

VII-2-4-3 Les diodes backward

Connaissant l'ordre de grandeur du courant qui traverse la diode pendant la prépolarisation, il est possible de linéariser la caractéristique avec une bonne approximation.

On en déduit les paramètres R_{bw} et V_{bw}, tous deux indépendants de la température. La dispersion sur la caractéristique de la diode sera traduite par le seul terme $\Delta V_{bw}/V_{bw}$ les variations de la résistance équivalente R_{bw} étant faibles.

Nous négligerons l'admittance de la diode backward lorsque celle-ci est soumise à de très faibles tensions de polarisation.



a) caractéristique réelle
échelle horiz. : 50 mV/car.
échelle vert. : 0,5 mA/car.

b) caractéristique théorique et linéarisation

Figure VII-5 Caractéristique de la diode backward BD 4.

VII-2-4-4 Les transistors

VII-2-4-4-1 Le transistor émetteur commun

Le transistor Tr_1 passe par deux états de conduction différents en cours de fonctionnement ; l'un près du blocage, pendant la phase de remise à zéro, l'autre à fort courant, au repos.

Il présente un gain en courant β_1 avec une incertitude $\Delta\beta_1/\beta_1$ et un coefficient en température $a_{\beta 1}$.

La caractéristique d'entrée a une forme quasi-exponentielle dans la zone de faible conduction. Nous prendrons une équation de la forme :

$$I_B = C_j.\exp\ (k_j.V_{BE} + a_j.\Theta \pm D_j)$$

faisant apparaître les paramètres C_j et k_j, l'incertitude D_j et le coefficient en température a_j.

Dans la zone de forte conduction, par contre, la caractéristique peut être linéarisée, ce qui permet d'écrire l'équation approchée :

$$I_B = \frac{V_{BE} - U_{T1}}{R_{T1}}$$

définissant les paramètres U_{T1} et R_{T1}.

Nous introduirons également l'incertitude $\Delta U_{T1}/U_{T1}$ et les coefficients en température a_{UT_1} et a_{RT_1}.

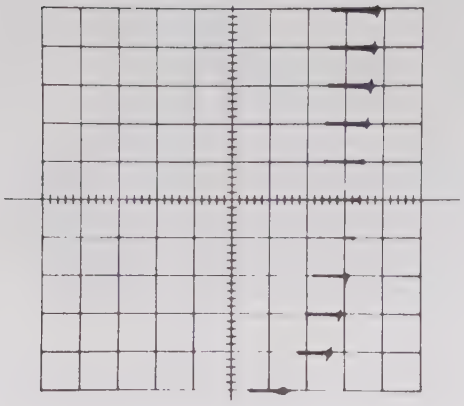
VII-2-4-4-2 Le transistor base commune

Cet étage doit être bloqué au repos par conséquent seule la tension de cut-off V_{co} affectée d'une incertitude $\Delta V_{co}/V_{co}$ et d'un coefficient en température a_{vco} intervient dans la condition relative à cet état.

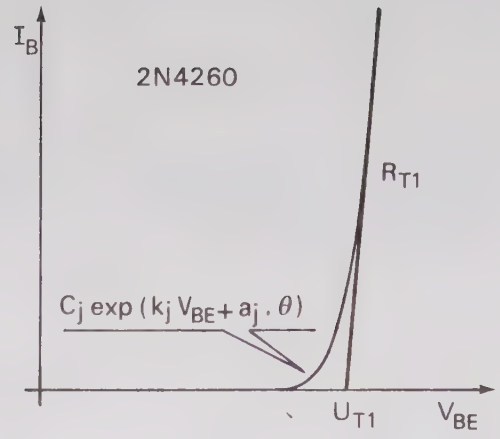
Pendant la remise à zéro qui correspond à son état de conduction, le transistor Tr_2 est défini par son gain en courant $\alpha_2 = \beta_2/1+\beta_2$, par le coefficient en température $a\beta_2$ et par les paramètres R_{T2}, a_{RT2}, U_{T2}, a_{UT2}, $\Delta U_{T2}/U_{T2}$ déduits de la linéarisation de la caractéristique d'entrée aux fortes conductions.

Il vient l'équation simplifiée :

$$I_E = \frac{V_{EB} - U_{T2}}{R_{T2}}$$

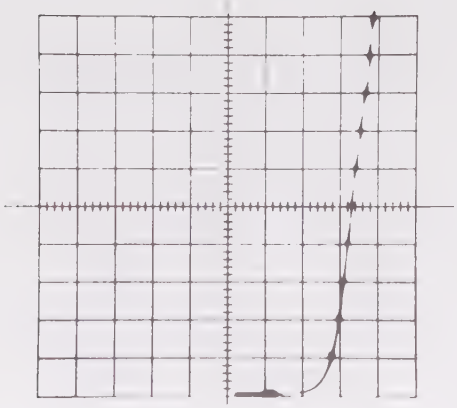


a) caractéristique réelle du transistor 2N 4260
échelle horiz. : 0,1 V/car.
échelle vert. : 0,05 mA/car.

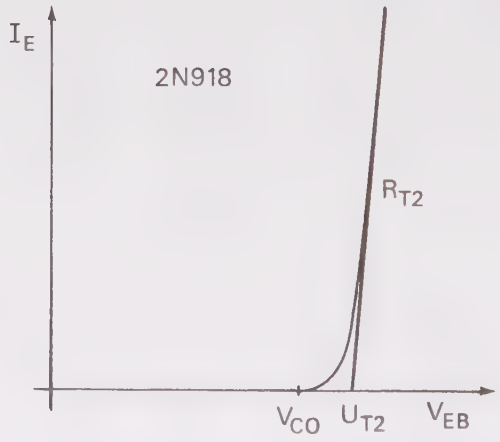


b) caractéristique théorique et linéarisation

Figure VII-6 Caractéristique d'entrée du transistor "Emetteur commun"



a) caractéristique réelle du transistor 2N 918
échelle horiz. : 0,1 V/car.
échelle vert. : 2 mA/car.



b) caractéristique théorique et linéarisation

Figure VII-7 Caractéristique d'entrée du transistor "Base Commune"

Remarque : De même que pour R_z et R_{bw}, nous n'avons pas introduit ici de tolérance sur R_j, R_{T1} et R_{T2} mais il est tenu compte implicitement de la dispersion sur ces paramètres dans la détermination de $\Delta U_j/U_j$, $\Delta U_{T1}/U_{T1}$ et $\Delta U_{T2}/U_{T2}$.

VII-3 CONDITIONS DE FONCTIONNEMENT

Les conditions qui régissent le fonctionnement de la décade tel que nous l'avons défini au chapitre II peuvent s'énoncer ainsi :

(1) - Une diode tunnel prépolarisée doit basculer quand on lui applique l'impulsion de commande i, c'est-à-dire que le courant qui tend à la traverser lorsqu'elle est dans son état de bas potentiel doit être supérieur au courant de pic

$$(I_0 + I_{pp} + i > I_p)$$

(2) - Une diode tunnel non prépolarisée ne doit pas basculer sous l'influence de l'impulsion de commande seule :

$$(I_0 + i < I_p)$$

(3) - La diode tunnel prépolarisée par l'étage précédent ne doit pas basculer lorsqu'on ne lui applique pas d'impulsion de commande :

$$(I_0 + I_{pp} < I_p)$$

(4) - Une diode tunnel qui a basculé doit rester dans son état de haut potentiel, c'est-à-dire que le courant qui la traverse alors doit être supérieur au courant de vallée.

$$(I_D > I_v)$$

(5) - La diode tunnel de remise à zéro ne doit pas basculer si la diode tunnel principale qui lui est associée n'a pas basculé.

$$(I_{z1} < I_p)$$

(6) - La diode tunnel de remise à zéro doit basculer lorsque la diode tunnel principale qui lui est associée a basculé :

$$(I_{z2} > I_p)$$

(7) - Le courant fourni par l'amplificateur doit être supérieur au courant nécessaire pour remettre à zéro les deux diodes d'un étage.

(8) - Le transistor T_{r_2} doit être bloqué au repos (sa tension émetteur-base doit être inférieure à sa tension de cut-off).

$$(V_{EB2} < V_{co})$$

(9) - Le transistor T_{r_1} ne doit pas se bloquer pendant la remise à zéro.

Il apparaît neuf conditions au total qui concernent toutes le régime statique. Toutefois, si les sept premières traduisent les principes mêmes du fonctionnement logique, les deux dernières ont été suggérées par l'étude expérimentale. L'une de ces conditions est destinée à restreindre l'incertitude du courant de repos I_0 de la diode tunnel principale, l'autre se rapporte au fonctionnement en régime dynamique et plus précisément à la rapidité de l'amplificateur puisqu'elle a pour but de limiter son temps de récupération. Toutes deux donnent lieu à un compromis et par conséquent à une optimalisation car l'étude expérimentale montre également que pour des questions de rapidité, les transistors doivent travailler à faible niveau, c'est-à-dire que T_{r_1} doit être polarisé près du blocage pendant la remise à zéro et T_{r_2} près de la conduction, au repos. Leur introduction dans l'optimalisation ne contribuera pas à l'amélioration de la sécurité de fonctionnement mais à celle de la rapidité de l'amplificateur de remise à zéro.

La sixième condition sur la remise à zéro contient implicitement une condition secondaire ; elle n'est en effet réalisable que si les deux transistors peuvent conduire un courant suffisant, c'est-à-dire s'ils ne se saturent pas séparément en cours de fonctionnement. Il faut pour cela que la tension E_4 soit inférieure à une limite.

Cependant, cette contrainte n'est pas jointe aux conditions de fonctionnement car elle ne s'insère pas dans le processus d'optimalisation, la tension E_4 ne faisant pas, théoriquement, l'objet d'un compromis.

En réalité, il existe bien une valeur optimale de E_4, mais elle ne peut être déterminée que de façon expérimentale car elle provient, d'une part, de l'augmentation de la rapidité de l'amplificateur avec la tension collecteur base des transistors et d'autre part, d'une question de puissance consommée dans le montage.

VII-4 EQUATIONS AUX LIMITES - COEFFICIENTS DE SECURITE

Elles sont obtenues à partir des conditions de fonctionnement précédentes en introduisant les tolérances sur les différentes grandeurs caractéristiques et les variations de celles-ci avec la température.

Une inéquation A > B est remplacée par l'équation $A_{min} = B_{max}$.

C'est à ce stade que l'on insère dans chaque condition, des coefficients de sécurité dont les valeurs sont dictées par des considérations de fonctionnement en régime dynamique.

Pour qu'une diode tunnel bascule dans son état de haut potentiel il faut et il suffit que la courbe de charge tracée sur la caractéristique soit au dessus du pic. Cependant, si le dépassement a une amplitude trop faible, le temps de commutation sera excessivement long et, à la limite, si le courant qui traverse la diode est juste égal au courant de pic, le basculement devient aléatoire ; cela justifie l'introduction d'un coefficient de sécurité C_{sp} dans l'équation aux limites de la forme $I_{min} = I_{pmax}$.

De même, une diode tunnel polarisée trop près du pic risque de commuter sous l'influence d'un signal parasite provenant soit de l'environnement extérieur, soit du mauvais découplage d'une alimentation ; c'est pourquoi il est nécessaire d'ajouter un coefficient C_{sm} aux équations aux limites de type $I_{max} = I_{pmin}$ issues des conditions de non basculement. C'est la marge de bruit du circuit au niveau bas.

Un autre coefficient de sécurité C_{sId} joue un rôle identique lorsque la diode tunnel est dans son état de haut potentiel.

Nous avons également introduit deux coefficients de forme dans les équations :

- Le pourcentage de dépassement ρ que présente le front de courant I_{pp} lors de la prépolarisation à cause de la nature capacitive du couplage entre étages.

- Le pourcentage de rebondissement négatif γ d'une impulsion de commande i de forme imparfaite.

En ce qui concerne l'influence de la température sur les conditions de fonctionnement, il faut avant tout définir une plage de température (θ_{min}, θ_{max}).

Comme les lois de variation des différentes grandeurs en fonction de la température sont monotones, le passage aux équations aux limites s'effectue simplement en prenant l'une des valeurs extrêmes θ_{min} ou θ_{max} suivant les conditions.

Pour certaines équations, dans lesquelles intervient une compensation des effets de la température, il est impossible de prévoir a priori quelle borne θ_{min} ou θ_{max} doit être prise en considération car celle-ci dépend des valeurs des éléments du montage et par conséquent du résultat de l'étude. Ces équations doivent être dédoublées en prenant successivement θ_{min} et θ_{max}. On résoud l'optimalisation avec l'une des expressions choisie arbitrairement et l'on contrôle après coup que la condition correspondante est bien vérifiée pour l'autre valeur extrême de la température quitte à faire l'opération inverse s'il n'en était pas ainsi.

Remarquons enfin que la condition sur la remise à zéro conduit à deux inéquations différentes, l'une concernant la diode tunnel principale, l'autre la diode tunnel DT_{raz} ; elle ne peut toutefois donner lieu qu'à une seule équation aux limites à cause d'une incompatibilité due au montage. Cette équation est donc double par nature et même quadruple dès que l'on introduit les valeurs extrémales de la température. Le processus de calcul sera le même que précédemment, avec choix arbitraire de l'une des expressions suivi de la vérification des trois autres après résolution.

Nous obtenons le système d'équations suivant :

$$(1)\qquad (1-\frac{\Delta I_o}{I_o}).I_o + (1-\frac{\Delta I_{pp}}{I_{pp}}).I_{pp(\theta_{max})} + (1-\frac{\Delta i}{i}).i = (1+\frac{\Delta I_p}{I_p}).I_{p(\theta_{max})} + C_{sp}$$

$$(2)\qquad \begin{cases} (1+\frac{\Delta I_o}{I_o}).I_o + (1+\frac{\Delta i}{i}).i = (1-\frac{\Delta I_p}{I_p}).I_{p(\theta_{min})} - C_{sm} \\ \text{ou} \\ (1+\frac{\Delta I_o}{I_o}).I_o + (1+\frac{\Delta i}{i}).i = (1-\frac{\Delta I_p}{I_p}).I_{p(\theta_{max})} - C_{sm} \end{cases}$$

$$(3)\qquad \begin{cases} (1+\frac{\Delta I_o}{I_o}).I_o + (1+\rho).(1+\frac{\Delta I_{pp}}{I_{pp}}).I_{pp(\theta_{min})} = (1-\frac{\Delta I_p}{I_p}).I_{p(\theta_{min})} - C_{sm} \\ \text{ou} \\ (1+\frac{\Delta I_o}{I_o}).I_o + (1+\rho).(1+\frac{\Delta I_{pp}}{I_{pp}}).I_{pp(\theta_{max})} = (1-\frac{\Delta I_p}{I_p}).I_{p(\theta_{max})} - C_{sm} \end{cases}$$

$$(4)\qquad \begin{cases} (1-\frac{\Delta V_D}{V_D}).V_{D(\theta_{min})} = (1-\frac{\Delta V_v}{V_v}).V_{v(\theta_{min})} + F(C_{sID}, \gamma_i) \\ \text{ou} \\ (1-\frac{\Delta V_D}{V_D}).V_{D(\theta_{max})} = (1-\frac{\Delta V_v}{V_v}).V_{v(\theta_{max})} + F(C_{sID}, \gamma_i) \end{cases}$$

$$(5)\qquad \begin{cases} (1+\frac{\Delta I_{z1}}{I_{z1}}).I_{z1} = (1-\frac{\Delta I_{pr}}{I_{pr}}).I_{pr(\theta_{min})} - C'_{sm} \\ \text{ou} \\ (1+\frac{\Delta I_{z1}}{I_{z1}}).I_{z1} = (1-\frac{\Delta I_{pr}}{I_{pr}}).I_{pr(\theta_{max})} - C'_{sm} \end{cases}$$

$$(6)\qquad \begin{cases} (1-\frac{\Delta I_{z2}}{I_{z2}}).I_{z2(\theta_{min})} = (1-\frac{\Delta I_{pr}}{I_{pr}}).I_{pr(\theta_{min})} + C'_{sp} \\ \text{ou} \\ (1-\frac{\Delta I_{z2}}{I_{z2}}).I_{z2(\theta_{max})} = (1-\frac{\Delta I_{pr}}{I_{pr}}).I_{pr(\theta_{max})} + C'_{sp} \end{cases}$$

(7)
$$\begin{cases} (1-\frac{\Delta a}{a}).(1-\frac{\Delta I'_{c2}}{I'_{c2}}).a.I'_{c2(\theta_{min})} = (1+\frac{\Delta I_D}{I_D}).I_{D(\theta_{min})} - (1-\frac{\Delta I_v}{I_v}).I_{v(\theta_{min})} \\ \text{ou} \\ (1-\frac{\Delta a}{a}).(1-\frac{\Delta I'_{c2}}{I'_{c2}}).a.I'_{c2(\theta_{max})} = (1+\frac{\Delta I_D}{I_D}).I_{D(\theta_{max})} - (1-\frac{\Delta I_v}{I_v}).I_{v(\theta_{max})} \\ \text{ou} \\ (1-\frac{\Delta a}{1-a}).(1-\frac{\Delta I'_{c2}}{I'_{c2}}).(1-a).I'_{c2(\theta_{min})} = (1+\frac{\Delta I_{Dr}}{I_{Dr}}).I_{Dr(\theta_{min})} - (1-\frac{\Delta I_{vr}}{I_{vr}}).I_{vr(\theta_{min})} \\ \text{ou} \\ (1-\frac{\Delta a}{1-a}).(1-\frac{\Delta I'_{c2}}{I'_{c2}}).(1-a).I'_{c2(\theta_{max})} = (1+\frac{\Delta I_{Dr}}{I_{Dr}}).I_{Dr(\theta_{max})} - (1-\frac{\Delta I_{vr}}{I_{vr}}).I_{vr(\theta_{max})} \end{cases}$$

(8)
$$\begin{cases} (1+\frac{\Delta V_{EB2}}{V_{EB2}}).V_{EB2(\theta_{min})} = (1-\frac{\Delta V_{co}}{V_{co}}).V_{co(\theta_{min})} - C_{so} \\ \text{ou} \\ (1+\frac{\Delta V_{EB2}}{V_{EB2}}).V_{EB2(\theta_{max})} = (1-\frac{\Delta V_{co}}{V_{co}}).V_{co(\theta_{max})} - C_{so} \end{cases}$$

(9)
$$(1-\frac{\Delta I_{E1}}{I_{E1}}).I_{E1(\theta_{min})} = I_j$$

Le coefficient a qui apparaît dans les équations 7 est le rapport du diviseur de courant utilisé pour la remise à zéro simultanée des deux diodes. C_{SO} est un coefficient de sécurité en tension introduit dans la condition de blocage du transistor T_{r_2}. I_j représente le courant d'émetteur minimal imposé au transistor T_{r_1}.

VII-5 CHOIX DES INCONNUES - CONDITIONNEMENT DU SYSTEME D'EQUATIONS

Le montage défini par les conditions de fonctionnement précédentes comprend neuf inconnues principales (n=9).

Une première inconnue correspond à la grandeur optimalisée ; nous avons choisi la plage de température, centrée sur la température ambiante.

$$2.\Delta\theta = \theta_{max} - \theta_{min}$$

il vient
$$\begin{cases} \theta_{max} = \theta_o + \Delta\theta \\ \theta_{min} = \theta_o - \Delta\theta \end{cases}$$

Les autres inconnues doivent jouer un rôle prépondérant dans les conditions de fonctionnement tout en étant indépendantes les unes des autres.

Tous les éléments actifs du montage étant choisis d'après des considérations de fonctionnement en régime dynamique et de disponibilité, nous avons pris comme inconnues principales :

- i (conditions 1 et 2)
- R_1 (conditions 1, 2 et 3 par l'intermédiaire de I_o)
- R_{2a} (conditions 6 et 5)
- R_{2b} (conditions 5 et 6)
- R_3 (conditions 1 et 3 par l'intermédiaire de I_{pp})
- r (condition 7)
- I_3 (condition 8)
- R (condition 9)

Notons d'autre part que c'est dans la condition 4 que l'inconnue $\Delta\theta$ a le maximum d'influence car la vallée de la diode tunnel est particulièrement sensible à la température.

Remarque : Les deux inconnues E_1 et R_1 sont incompatibles car elles interviennent de façon pratiquement identique dans l'expression de I_o. Il en est de même pour E_2 et R. Nous aurions pu opter pour E_1 ou E_2 lors du choix des inconnues mais il nous a semblé préférable de normaliser les tensions d'alimentation.

L'ordre des inconnues doit être choisi de façon à bien conditionner le système d'équations pour obtenir la meilleure précision dans la résolution par triangularisation directe et par suite une bonne convergence du processus itératif.

Chaque inconnue doit avoir une influence prépondérante dans l'équation de même rang, ce qui nous conduit à adopter l'ordre des inconnues suivant, pour le système tel qu'il est formé :

$$R_1,\ i,\ R_3,\ \Delta\theta,\ R_{2B},\ R_{2A},\ r,\ I_3,\ R$$

VII-6 VALEURS DE DEPART DES INCONNUES

La résolution du système par la méthode de Newton ne peut être abordée que si l'on connaît une valeur proche de la solution pour chaque inconnue.

Il suffit pour cela de résoudre approximativement le système simplifié obtenu en évaluant les incertitudes sur les différentes grandeurs caractéristiques considérées à la température ambiante θ_o.

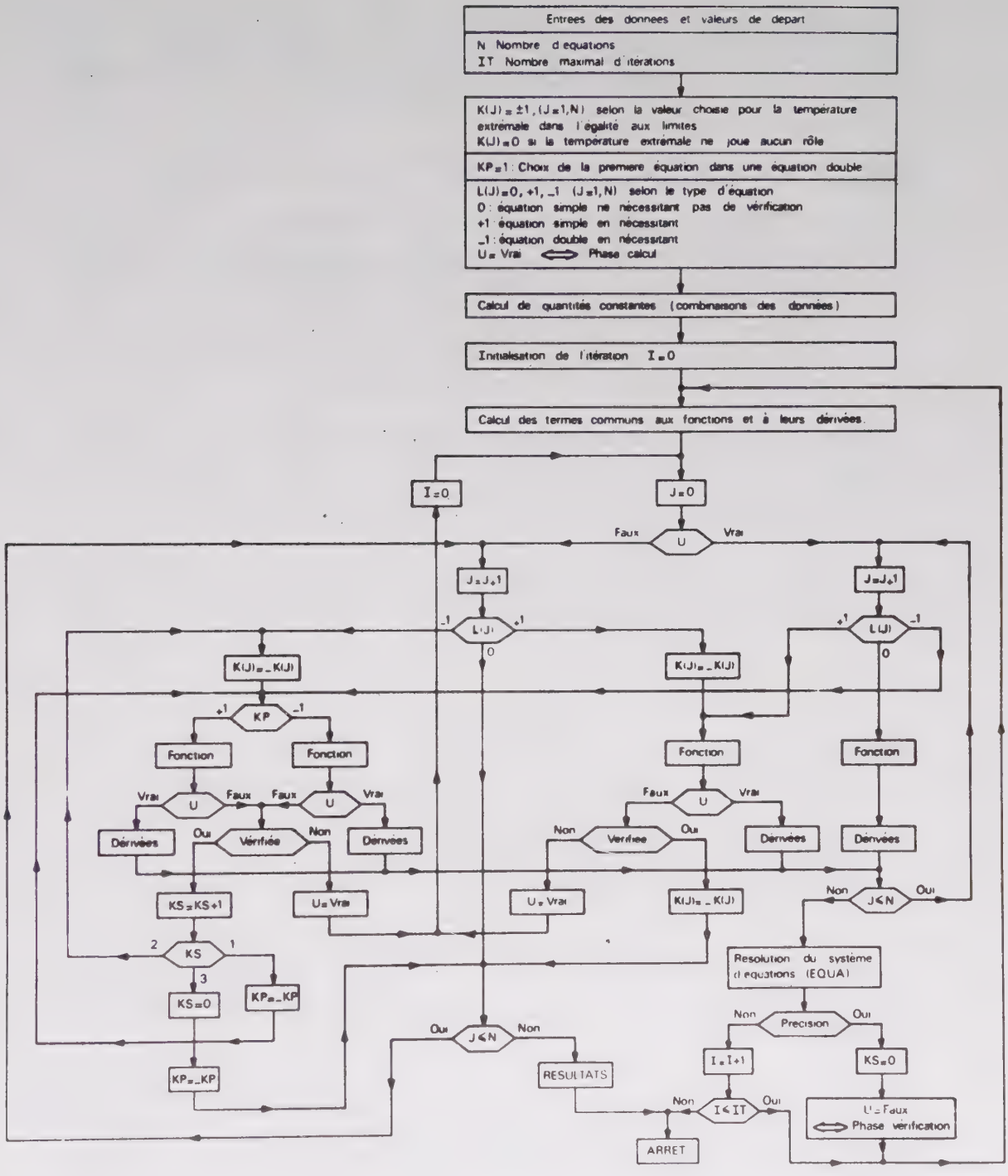
VII-7 RESOLUTION - ORGANIGRAMME

Il s'agit de l'organigramme général de résolution établi au chapitre précédent auquel on a rajouté un processus de vérification des équations de façon à l'adapter au système particulier comportant des équations doubles et des équations quadruples.

Il comprend donc deux phases différentes :

- une phase calcul (U = "vraie") au cours de laquelle on résoud le système d'équations écrit sous une forme arbitraire. Elle comporte la détermination des valeurs numériques des fonctions F_q et de celles de leurs dérivées partielles par rapport à chaque variable, à partir des données initiales et pour les valeurs de départ des inconnues, puis la résolution du système linéarisé des écarts, opérations renouvelées jusqu'à ce que l'on obtienne la précision désirée,

- une phase vérification (U = "faux") pendant laquelle on calcule les nouvelles valeurs des fonctions F_q pour la solution trouvée et l'on vérifie successivement toutes les



ORGANIGRAMME GENERAL DE RESOLUTION

I est le nombre d'itérations
U est une variable logique permettant de différentier la phase "calcul" de la phase "vérification"
KP et KS permettent de choisir la fonction que l'on doit prendre dans une équation double lors des calculs et lors de la vérification.

équations complémentaires. Cette phase est interrompue dès qu'une vérification est mauvaise pour être remplacée par la phase calcul avec la nouvelle expression de l'équation qui s'est révélée défectueuse.

Remarque : Il apparaît trois types différents d'équations :

- celles qui n'ont pas besoin de vérification.
- celles qui ont deux expressions complémentaires et qui nécessitent par conséquent une vérification.
- celles qui ont deux formes distinctes avec deux expressions complémentaires chacune et pour lesquelles il faut faire trois vérifications (équations quadruples).

Le test de précision utilisé pour l'arrêt des calculs est effectué sur la variable de précision déterminée par le sous programme EQUA et correspondant à la somme des variations relatives des inconnues entre deux itérations successives.

Il est également prévu dans l'organigramme une limite supérieure du nombre d'itérations pour le cas où le processus de calcul ne convergerait pas.

VII-8 RESULTATS

Le montage comprend neuf inconnues principales et soixante-douze paramètres (en l'absence de contrainte extérieure autre que la température).

La résolution numérique a été effectuée sur ordinateur IBM 360 44 avec cartes pour support d'entrée et sortie sur imprimante. Le calcul, réalisé en double précision, dure environ 4 minutes.

Le programme, écrit en Fortran, permet d'obtenir la solution de l'optimalisation, c'est-à-dire la valeur des inconnues principales, à partir d'un tableau de données initiales (page 163) définissant les 72 paramètres du montage et des valeurs de départ préalablement déterminées.

Les résultats sont donnés sous la forme d'un tableau comme celui qui est reproduit page 164. Le circuit est alors parfaitement déterminé.

E_1 (V)	E_2 (V)	$\Delta E/E$	$\Delta r/r$	$\Delta R/R$	$\Delta V_e/V_e$	ΔG_o (mmho)	G_4 (mmho)
24	18	0,0001	0,04	0,02	0,05	1	1
θ_o (°C)	I_{po} (mA)	$\Delta I_p/I_p$	a_{Ip} (mA/°C)	r_1 (kΩ)	$\Delta r_1/r_1$	I_{vo} (mA)	a_{Iv} (mA/°C)
24	10,3	0,035	-0,011	0,0045	0,11	0,806	0,00375
$\Delta I_v/I_v$	V_o (V)	a_v (V/°C)	$\Delta V/V$	A	α (mA)	δ (mA/V)	C_{sp} (mA)
0,11	0,447	-0,00108	0,045	500	2,12	2,4	0,3
C_{sm} (mA)	C_{sId} (mA)	V_{bw} (V)	$\Delta V_{bw}/V_{bw}$	R_{bw} (kΩ)	r_2 (kΩ)	$\Delta r_2/r_2$	I_{pro} (mA)
0,2	0,15	0,05	0,18	0,022	0,019	0,27	2,12
a_{Ipr} (mA/°C)	$\Delta I_{pr}/I_{pr}$	V_{zo} (V)	$\Delta V_z/V_z$	a_{vz} (V/°C)	R_z (kΩ)	β_{10}	a_{β_1} (1/°C)
-0,002	0,02	0,477	0,05	-0,00116	0,03	55	0,32
$\Delta\beta_1/\beta_1$	R_{T10} (kΩ)	a_{RT1} (kΩ/°C)	U_{T10} (V)	$\Delta U_{T1}/U_{T1}$	a_{UT1} (V/°C)	I_j (mA)	C_j (mA)
0,18	0,215	0,00145	0,805	0,035	-0,0016	0,5	$0,32.10^{-12}$
k_j (V^{-1})	a_j (1/°C)	D_j	V_{co} (V)	a_{vco} (V/°C)	$\Delta V_{co}/V_{co}$	β_{20}	a_{β_2} (1/°C)
32,2	0,046	0,9	0,685	-0,002	0,042	50	0,104
$\Delta\beta_2/\beta_2$	U_{T20} (V)	$\Delta U_{T2}/U_{T2}$	a_{UT2} (V/°C)	R_{T20} (kΩ)	a_{RT2} (kΩ/°C)	V_{vro} (V)	a_{vr} (V/°C)
0,2	0,818	0,035	-0,0015	0,0038	0,00002	0,355	-0,0011
$\Delta V_r/V_r$	γ	ρ	V_p (V)	E_4 (V)	$\Delta I_3/I_3$		
0,11	0,05	0,2	0,08	6	0,02		

OPTIMALISATION DE LA DECADE A DIODES TUNNEL

Tableau de données

RESULTATS

0.10224D 02 0.29189D 01 0.49241D 00 0.19189D 00 0.11610D 01 0.61151D 01 0.45772D 00
0.94152D 02 0.14553D-01 0.50011D 00 0.80042D 01 0.13133D 02 0.25030D 01 0.31073D 00

R1= 3218.3 OHM RA= 76.1 OHM R8= 399.5 OHM R3= 124.9 OHM I= 2.92 MA

RR= 500.1 OHM RX= 14.6 OHM I3= 94.15 MA TETAMIN= 13.8 TETAMAX= 34.2

IO= 6.12 MA VD= 457 MV IZ= 1.16 MA IB1= 0.49 MA IBIP= 0.19 MA

/8
DUREE= 00.03.54

Remarque : Dans ce tableau I représente l'impulsion de commande i ; RR la résistance R ; RX la résistance r ; V_D la tension nominale aux bornes de la diode tunnel principale "montée" ; IZ le courant de la diode D_{Traz} au repos ; IB1 le courant de base de Tr_1 au repos et IB1P ce courant pendant la remise à zéro ; TETAMIN et TETAMAX les bornes de la plage de température exprimées en °C.

VII-9 OPTIMALISATION DES DONNEES

Les résultats obtenus par cette méthode de calcul définissent le montage optimal pour un ensemble donné de paramètres.

Si l'une des données initiales a_j varie, le montage optimal ne sera pas le même ni la plage de température correspondante. En recommençant la résolution mathématique pour différentes valeurs de ce paramètre a_j, il est possible de noter son influence sur les résultats et plus particulièrement sur le critère d'optimalisation, soit $\Delta\theta$ ici. Il suffit alors de tracer point par point la courbe de variation de $\Delta\theta$ en fonction de a_j pour en déduire sa valeur optimale, si elle existe.

En réalité, c'est un compromis général que l'on cherche à obtenir entre la sécurité de fonctionnement et d'autres critères tels que le prix de revient, la disponibilité des composants, la possibilité de réalisation pratique, etc. ...

Nous l'avons fait pour le montage précédent qui correspond au tableau de données initiales reproduit page 163. Tous les paramètres susceptibles de faire l'objet d'un choix ont été examinés successivement ; ce sont :

$$E_1,\ E_2,\ G_4,\ \theta_o,\ \frac{\Delta R}{R},\ \frac{\Delta r}{r},\ \frac{\Delta E}{E},\ \frac{\Delta V_e}{V_e},\ \gamma\ ,\ \rho\ ,\ \frac{\Delta I_p}{I_p},\ \frac{\Delta r_1}{r_1},$$

$$\frac{\Delta V}{V},\ \frac{\Delta I_{pr}}{I_{pr}},\ \frac{\Delta r_2}{r_2},\ \frac{\Delta V_z}{V_z},\ C_{sm},\ C_{sp},\ C_{sID},\ \frac{\Delta V_{bw}}{V_{bw}},\ \frac{\Delta I_3}{I_3},\ I_j$$

$$\beta_{10},\ \frac{\Delta\beta_1}{\beta_1},\ \frac{\Delta U_{T1}}{U_{T1}},\ \beta_{20},\ \frac{\Delta\beta_2}{\beta_2},\ \frac{\Delta U_{T2}}{U_{T2}}$$

Les courbes que nous avons obtenues sont données en annexe. La partie de chacune d'elles dessinée en pointillé correspond à une extrapolation car au-delà d'une certaine plage de température le montage n'est plus réalisable, l'amplificateur de remise à zéro ne pouvant plus remplir sa fonction ($r < 0$) ; c'est une impossibilité inhérente au choix des composants actifs (diodes tunnel et transistors) qui ne met pas directement en cause l'influence du paramètre sur le fonctionnement du montage.

Toutes les courbes de variation sont monotones, ce qui simplifie la recherche du montage optimal. Elles mettent en évidence les paramètres qui ont une importance prépondérante dans le fonctionnement du montage, comme les tolérances $\Delta R/R$, $\Delta r/r$,

$\Delta I_p/I_p$ et les coefficients C_{sm} , C_{sp} , C_{sID} ou au contraire ceux qui ne jouent qu'un rôle secondaire, comme E_2, $\Delta r_1/r_1$, $\Delta r_2/r_2$, $\Delta V_{bw}/V_{bw}$, β_{20}, $\Delta\beta_2/\beta_2$, $\Delta U_{T2}/U_{T2}$.

Si le domaine considéré n'était pas restreint par des limitations physiques nous pourrions constater que la majorité des courbes atteignent un palier, à l'image de celle relative à $\frac{\Delta E}{E}$. En effet, lorsqu'un coefficient pris séparément diminue ou augmente au-delà de certaines valeurs il n'influe plus que très faiblement sur les conditions de fonctionnement du montage.

Les paramètres propres au circuit de remise à zéro ont une influence contraire sur la plage de température, mais, comme nous l'avons mentionné précédemment, l'optimalisation a été abordée de façon à minimiser le niveau du courant de sortie et par suite, le temps de réponse de l'amplificateur. Ce sont les variations de la résistance r qu'il faut alors considérer car elle est caractéristique de la rapidité du circuit.

L'observation des courbes peut apporter un grand nombre d'enseignements supplémentaires. C'est ainsi que l'on peut noter par exemple l'augmentation de la plage de température consécutive à une diminution de la température ambiante θ_o ; ceci provient de l'accroissement du rapport I_p/I_v qui en résulte.

Remarquons enfin que les courbes de variation de la plage de température en fonction des coefficients de sécurité sont toutes monotones décroissantes ce qui confirme, s'il en était besoin, que l'optimum correspond bien aux conditions aux limites c'est-à-dire à la saturation des contraintes.

CHAPITRE VIII

REALISATION PRATIQUE DE LA DECADE

La décade que nous avons réalisée au laboratoire constitue avant tout un circuit de test permettant de vérifier les conclusions de la première étude expérimentale et la validité de l'optimalisation.

Ce prototype est également destiné à faire apparaître les incidences du mode de fabrication sur les conditions de fonctionnement du montage et à fournir, accessoirement, des enseignements d'ordre technologique, utiles à l'élaboration éventuelle d'un circuit dans sa version définitive.

VIII-1 CHOIX DES COMPOSANTS

VIII-1-1 Composants actifs

VIII-1-1-1 Les diodes tunnel

Il s'agit de diodes tunnel de commutation rapide, au germanium.

Les diodes D_{Tp} sont des diodes RCA 40572. Elles ont un courant de pic de 10 mA et un temps de montée théorique de 0,3 ns. Elles sont disponibles sur le marché avec une tolérance $\Delta I_p/I_p$ de ± 5 % mais le lot que nous avions au laboratoire, présentait initialement une dispersion inférieure à ± 2,5 %. Par la suite, les diodes tunnel ont subi un échauffement excessif, lors de

la réalisation pratique du circuit, qui a provoqué une variation aléatoire de la valeur de leur courant de pic et elles présentent en définitive une dispersion maximale

$$\frac{\Delta I_p}{I_p} = \pm 3,5\ \%$$

pour une valeur nominale

$$I_p = 10,1 \quad mA$$

Les diodes D_{Traz} sont des diodes tunnel G. E. TD 715. Elles possèdent un courant de pic de 2,2 mA ± 0,05 mA et un temps de montée intrinsèque de 1,6 ns.

VIII-1-1-2 Les diodes de prépolarisation

Ce sont des diodes backward G. E. BD 4, choisies pour leur faible capacité de jonction.

VIII-1-1-3 Les transistors

Tr_1 est un transistor PNP 2N 4260 tandis que Tr_2 est un transistor NPN 2N 918. Tous deux sont des transistors amplificateurs faibles signaux, choisis pour leur produit gain x bande-passante très élevé.

Les paramètres de tous ces composants, nécessaires à l'optimalisation, ont été mesurés au laboratoire et sont consignés dans le tableau de la page 163(chapitre VII).

VIII-1-2 Composants passifs - Résistances

Si l'on souhaite obtenir un très faible temps de résolution pour la décade et profiter de la rapidité intrinsèque des composants actifs qui la constituent, il est nécessaire de réduire au minimum tous les éléments parasites réactifs du montage. C'est dans ce but, qu'avant de choisir les résistances du circuit, nous avons procédé à une étude systématique de leur réponse en impulsion.

VIII-1-2-1 Etude du comportement des résistances en régime impulsionnel.

Pour tester une résistance en régime impulsionnel, nous l'insérons dans une structure coaxiale 50 Ω de façon à constituer un atténuateur auquel nous appliquons un front de tension. L'étude de la forme du signal de sortie observé sur un oscilloscope à échantillonnage nous permet alors d'en déduire le comportement de la résistance ; l'atténuateur est surcompensé ou souscompensé suivant le caractère capacitif ou inductif de l'élément.

En réalité, le schéma équivalent d'une résistance est extrêmement complexe car il comporte simultanément des inductances et des capacités parasites, plus ou moins réparties. Cependant, si les éléments réactifs sont pratiquement les mêmes pour un type de composant donné, l'un d'entre eux peut avoir une influence prédominante suivant la valeur ohmique considérée. Les résistances de fortes valeurs ont un caractère capacitif tandis que celles de faibles valeurs sont davantage affectées par une inductance série.

Nous avons réalisé cette étude à l'aide du générateur d'impulsions TEKTRONIX 284 qui fournit un front de temps de montée inférieur à 70 ps et de l'oscilloscope à échantillonnage TEKTRONIX type 561 B équipé du tiroir 3S2 et des têtes S2 ($\theta \leq 50$ ps).

VIII-1-2-2 Résultats

Une étude comparative des différents composants disponibles dans le commerce nous a permis de mettre en évidence le bon comportement en régime impulsionnel des résistances à couche de carbone en général. Elles présentent une réponse presque parfaite, sans augmentation du temps de montée ni dépassement, pour des valeurs ohmiques comprises entre 50 et 100 Ω ; il intervient dans ce cas une compensation des effets capacitif et inductif qui correspond au régime critique de l'élément.

VIII-1-2-3 Choix des résistances

La décade comporte des résistances de deux types différents suivant le rôle qu'elles jouent dans le montage.

VIII-1-2-3-1 Résistances de couplage

Il s'agit de toutes les résistances qui interviennent directement dans le fonctionnement dynamique du circuit.

Nous avons choisi des résistances ALLEN BRADLEY 1/4 W à 5 %. Elles possèdent une bonne réponse impulsionnelle pour des valeurs inférieures à 250 Ω et celles de 500 Ω présentent un dépassement de 4 % dans les conditions de test définies précédemment.

VIII-1-2-3-2 Résistances de polarisation

Nous avons utilisé des résistances bobinées de puissance (8 W), seuls composants dont l'effet inductif n'est pas perturbé par un effet capacitif excessif. L'amplitude de l'impulsion transmise lors du front est inférieure à celle du palier obtenu après intégration, et ceci pour des valeurs ohmiques de plusieurs KΩ.

Ce phénomène est dû au type de fabrication de la résistance (fil métallique très fin bobiné) et provient vraisemblablement d'un renforcement du caractère inductif de l'élément par un "effet de peau".

VIII-1-3 Alimentations

Les tensions de polarisation sont obtenues à l'aide d'alimentations stabilisées TRANCHANT TZ 40 à affichage numérique ; quant au générateur de courant, il est réalisé à partir d'une alimentation de tension du type précédent et d'une résistance.

VIII-2 REALISATION

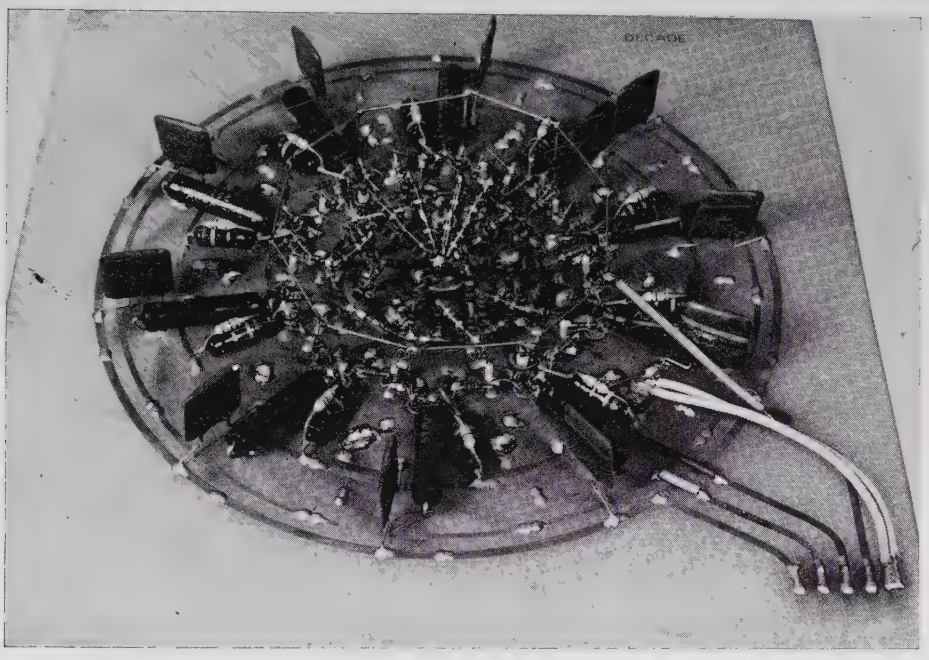
Le prototype de la décade se présente sous la forme d'un câblage tridimensionnel sur support diélectrique en verre époxy et plan de masse en circuit imprimé.

Comme il s'agit essentiellement d'un circuit de test, nous avons équipé certains étages de sondes passives d'oscilloscope permettant une observation directe du fonctionnement ; les autres étages sont chargés par des résistances adéquates de façon à ne pas détruire la symétrie de l'anneau.

Les sondes TEKTRONIX P 6034, utilisées pour l'analyse du régime dynamique, ont les caractéristiques suivantes :

- impédance d'entrée 500 Ω
- capacité d'entrée 0,7 pF (ou 1,7 pF avec le support)
- temps de montée 100 ps.

Une résistance additionnelle de 500 Ω, placée en série avec la sonde, permet de diminuer la charge déjà élevée des diodes tunnel principales. Nous avons choisi sa valeur de façon à former un atténuateur à peu près compensé.


DECADE

Remarque : La présence de ces sondes ou des résistances les simulant ne peut que nuire au bon fonctionnement de la décade aussi bien en régime statique qu'en régime dynamique. Celles-ci constituent non seulement une charge résistive supplémentaire pour les diodes D_{TP}, ce qui diminue la plage de température et, par contre coup, les tolérances permises sur les différents paramètres, mais également une charge réactive, due aux capacités parasites, qui perturbe la forme des signaux aux noeuds principaux du montage.

Ces circuits de charge disparaîtront totalement dans la version définitive de la décade si l'on réalise la prise d'information au niveau de l'amplificateur de remise à zéro, soit aux bornes de la diode D_{Traz}, soit sur l'émetteur de Tr_1.

VIII-3 RESULTATS

De nombreuses difficultés inhérentes au mode de soudure des composants actifs et à la répartition des éléments dans le circuit, sont apparues lors de la réalisation pratique. Cependant, une fois câblé, le montage a fonctionné dans les conditions prévues sans aucun réglage particulier.

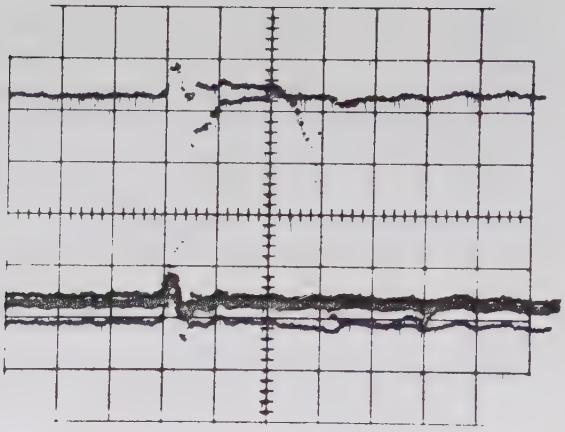
Les oscillogrammes des figures VIII-1-a, b, c représentent la forme des signaux aux bornes d'une diode tunnel principale de l'anneau, avec une origine des temps fixe par rapport à chaque impulsion de commande. Ils ont été photographiés sur un oscilloscope à échantillonnage TEKTRONIX type 661, synchronisé extérieurement par les impulsions appliquées à la décade, ce qui explique la présence simultanée de dix traces différentes. On y distingue les divers états pris par une diode D_{TP} en cours de fonctionnement.

Les signaux de commande sont fournis par le générateur LEPAUTE type GITN et mis en forme à l'aide de circuits à transistor fonctionnant en régime d'avalanche. Nous pouvons obtenir ainsi des trains de trois impulsions de largeur inférieure à 1 ns, décalées l'une par rapport à l'autre d'un intervalle de temps réglable entre 0 et 500 ns, le tout avec une fréquence de récurrence de plusieurs dizaines de kilohertz. Il est possible, dans ces conditions, de simuler un signal d'horloge de fréquence supérieure au gigagertz.

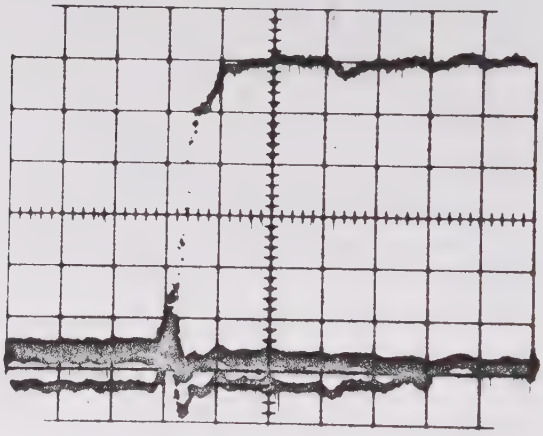
Les temps de montée observés sur les différents étages sont inférieurs à la nanoseconde, résultat que laissait espérer l'étude expérimentale du module de base, par contre les temps de remise à zéro varient entre 9 et 12 ns.

Le temps de résolution de la décade est donc inférieur à 1 ns, ce qui correspond à une fréquence de comptage théorique de 1 GHz. En fait, ce montage ne permet pas d'atteindre cette

a) Différents états pris par la diode D_{Tp}



b) "Montée" de la diode D_{Tp}



c) Remise à zéro de la diode D_{Tp}

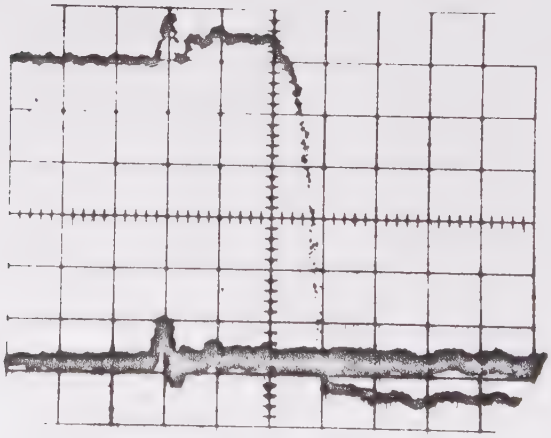
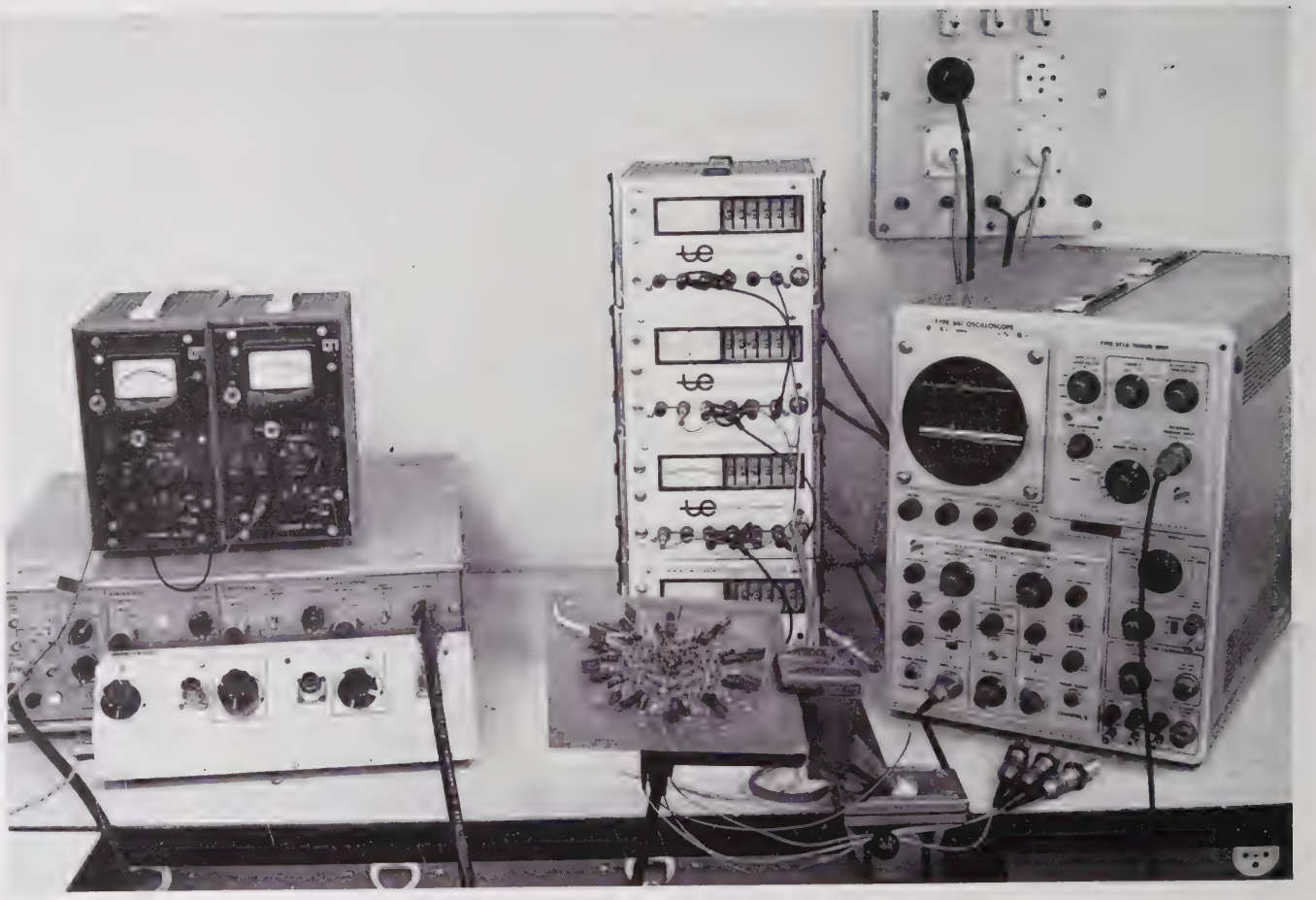


Figure VIII-1 Oscillogramme de la tension aux bornes d'une diode tunnel principale de l'anneau.

Echelle horizontale : 2 ns/carreau.



limite en régime périodique continu, à cause de la valeur excessive du temps de réponse de l'amplificateur de remise à zéro et de ses variations suivant les étages. Ces dernières proviennent principalement des temps de retard et de récupération du circuit, dont les origines sont multiples ; au temps de réponse intrinsèque des transistors s'ajoutent les temps de déblocage ou de reblocage de Tr_2, différents d'un étage à l'autre en raison des dispersions sur les paramètres. Ces phénomènes sont d'autant plus accentués que l'amplitude nécessaire pour l'impulsion de remise à zéro est élevée, car une diminution de la résistance r entraîne une mauvaise stabilisation du point de fonctionnement de Tr_1 et par suite, une augmentation concomitante du gain que l'on doit imposer à l'amplificateur (par une nouvelle diminution de r).

VIII-4 ESSAIS EN TEMPERATURE

Nous avons mesuré une plage de température correspondant à un fonctionnement correct, comprise entre 10°C et 43°C. Elle est supérieure à celle prévue par le calcul d'optimalisation.

C'est un résultat logique car la probabilité pour que toutes les conditions les plus défavorables soient réunies simultanément dans un montage donné est extrêmement faible, si bien que la probabilité de fonctionnement n'est pas négligeable en dehors de la plage de température théorique.

Remarque : Une variation de température aux abords des limites de la plage ne se traduit pas de la même façon sur le fonctionnement du montage suivant la frontière considérée ; dans un cas le fonctionnement s'arrête instantanément, dans l'autre il présente des ratés. Cette différence provient de la nature des conditions affectées par la valeur critique de la température.

VIII-5 POSSIBILITES D'AMELIORATION DE LA DECADE

Les performances de la décade de test ne sont limitées que par les circuits de remise à zéro essentiellement, dans la mesure où la suppression des sondes d'oscilloscope, inutiles sur un montage définitif et le choix de diodes tunnel principales plus rapides, permettent d'abaisser le temps de résolution intrinsèque du compteur.

Plusieurs améliorations nous sont suggérées par l'analyse du fonctionnement de l'amplificateur de remise à zéro ; certaines n'exigeant aucune modification fondamentale du schéma de principe, peuvent être introduites dès la réalisation d'un prototype, d'autres par contre nécessitent au préalable une nouvelle étude théorique ou pratique du circuit.

VIII-5-1 Prospective à court terme

Il est possible de réduire le temps de réponse du circuit de remise à zéro déjà étudié, de façon directe ou indirecte :

1°) Par le choix d'une diode tunnel D_{Traz} plus rapide. La diode G. E. TD 251, par exemple, présente un temps de montée intrinsèque de 0,43 ns.

2°) Par une polarisation de la diode D_{Traz} plus près de la vallée lorsqu'elle est dans son état de haut potentiel, facilitant ainsi sa propre remise à zéro.

Remarque : Il est possible, à la limite, de lier plus étroitement les états des deux diodes D_{Traz} et D_{Tp}, de façon que la remise à zéro de la deuxième entraîne systématiquement celle de la première. On diminue ainsi l'amplitude nécessaire pour l'impulsion de remise à zéro et par suite le gain en courant que l'on doit exiger de l'amplificateur à transistors. Selon ce nouveau montage, la remise à zéro des deux diodes tunnel s'opèrerait en série alors que dans le circuit actuel, elle est effectuée en parallèle. Cette solution constitue en quelque sorte une adaptation qui justifie le gain de performance que l'on peut en attendre. Il y a en effet une perte énergétique à la remise à zéro dans la mesure où les temps de transition de l'amplificateur sont supérieurs aux temps de commutation des diodes tunnel.

3°) Par séparation des polarisations en continu des deux diodes tunnel, mesure destinée à diminuer l'incertitude sur les courants de repos de chaque élément, ce qui peut permettre d'associer à la diode principale, une diode D_{Traz} de courant de pic plus élevé (5 mA par exemple). La réponse de l'amplificateur à transistors s'en trouverait sensiblement améliorée.

Toutes ces solutions simples doivent permettre à elles seules d'obtenir aisément une fréquence de comptage supérieure à 1 GHz. Nous avons néanmoins envisagé d'apporter des perfectionnements supplémentaires au circuit de remise à zéro, bien qu'ils soient moins immédiats à mettre en oeuvre.

VIII-5-2 Prospective à long terme

Deux possibilités d'amélioration sont actuellement en cours d'étude ; elles reposent sur :

1°) La réalisation de la décade en circuit hybride en couches épaisses avec des composants appropriés. Cette solution laisse espérer un gain supplémentaire des performances dans un rapport deux, prévision basée sur l'expérience que possède le laboratoire dans le domaine des circuits de commutation fabriqués suivant cette technologie.

2°) La recherche d'un nouveau circuit de remise à zéro avec une meilleure précision sur la polarisation des différents composants de façon à réduire le gain minimal imposé à l'amplificateur et par suite le retard variable d'un étage à l'autre. Le principal défaut du circuit utilisé réside dans l'association d'une diode tunnel et d'un transistor PNP monté en "émetteur commun" ; il en résulte une forte conduction du transistor au repos , d'une part et une addition des effets de la température sur les caractéristiques des deux éléments, d'autre part (il y aurait compensation des effets avec un transistor de type NPN).

VIII-6 CONCLUSION

Les résultats obtenus avec la décade de test nous confirment le bien-fondé de l'optimalisation que nous avons mise au point. Sans elle, il eut été impossible de concevoir ce montage au fonctionnement particulièrement critique, avec la plage de température correspondante, sans aucun réglage continu ni aucun tri poussé des composants et, si le fait s'était produit, nous n'aurions eu aucune indication concernant la reproductibilité du circuit.

Un autre enseignement nous est apporté par le circuit de test : la possibilité de réaliser une décade à diodes tunnel de fréquence de comptage 2 GHz à partir du même schéma de principe. En effet, d'une part, l'amplificateur de remise à zéro est susceptible d'améliorations, d'autre part, la suppression des sondes d'oscilloscope (inutiles sur la version définitive), le choix de composants plus rapides et la réalisation en circuit hybride en couches épaisses sont autant de mesures qui contribueront à accroître les performances du montage actuel.

Il est possible par ailleurs d'obtenir des fréquences de comptage supérieures à 2 GHz grâce à l'emploi de diodes tunnel très rapides telles que les diodes G. E. TD 253 B, dans un compteur en anneau comprenant un nombre suffisant d'étages pour pallier la valeur excessive du temps de remise à zéro, comme nous l'avons vu dans le chapitre II.

CHAPITRE IX

PROBABILITE DE FONCTIONNEMENT DU MONTAGE

L'optimalisation des circuits électroniques que nous avons réalisée suivant une méthode de calcul déterministe permet de définir, à partir d'un schéma de principe et pour un ensemble de paramètres donnés, les éléments du montage présentant une sécurité de fonctionnement totale sur la plus grande plage de température (en l'absence toutefois de défaillance cataleptique).

La probabilité de fonctionnement théorique est donc égale à l'unité, à l'intérieur de cette plage de température, mais cela ne signifie pas pour autant qu'elle soit nulle en dehors. Elle est même certainement proche de l'unité aux abords immédiats de la plage car la probabilité pour que tous les paramètres aient simultanément leur valeur la plus défavorable est infime.

Nous allons voir comment varie la probabilité de fonctionnement du montage optimal avec la température.

IX-1 ETUDE STATISTIQUE DU FONCTIONNEMENT D'UN CIRCUIT

Considérons l'une des inéquations du système (III,13) issues des conditions de fonctionnement.

Soit $F_q(z_i) \leqslant 0$

F_q est une fonction implicite de la température.

La méthode de calcul déterministe que nous avons utilisée consiste à définir les paramètres z_i, compte tenu de leurs tolérances maximales, pour que toutes les quantités F_q soient négatives sur la plus grande plage de température possible (θ_{min}, θ_{max}) centrée sur θ_o, avec à la limite :

$$\left|F_q(z_i)\right|_{\theta_\ell} = 0$$

en prenant pour θ_ℓ, θ_{min} ou θ_{max} suivant le sens de variation de F_q (figure IX-1-a).

Dans ces conditions, nous aurons à l'intérieur de la plage de température :

$$Pr(F_q \leqslant 0) = 1$$

si toutes les variables z_i vérifient la double inégalité :

$$z_{noi} - \Delta z_i \leqslant z_i \leqslant z_{noi} + \Delta z_i$$

quelle que soit leur loi de distribution pourvu qu'elle soit bornée.

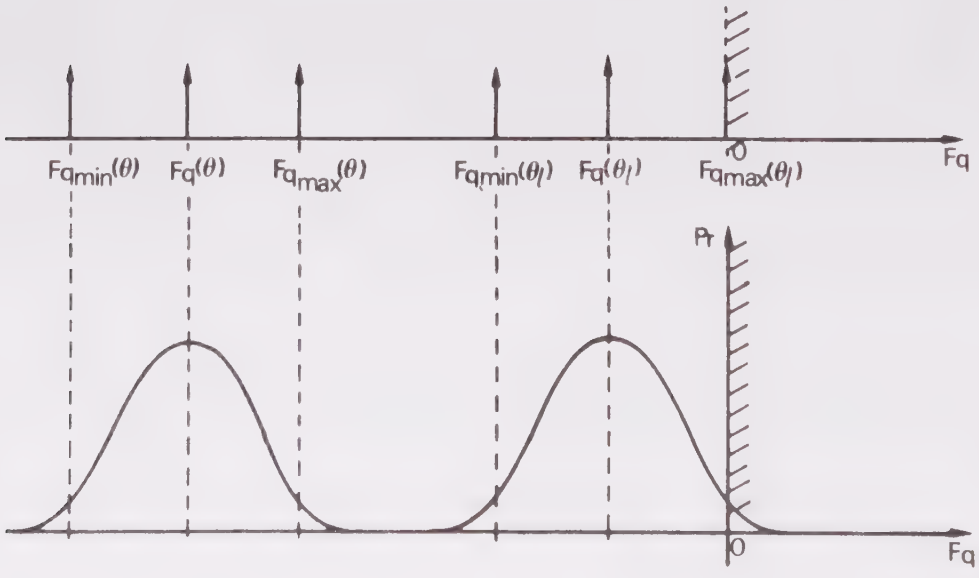


Figure IX-1 Condition de fonctionnement $F_q \leqslant 0$

Si maintenant nous introduisons la densité de probabilité de chaque paramètre z_i, nous pouvons théoriquement déterminer celle des fonctions F_q à une température donnée. Lorsque cette dernière varie, la courbe de densité de probabilité de F_q se déforme et surtout se déplace le long de l'axe des F_q (figure IX-1-b).

La probabilité $Pr(F_q \leq 0)$, égale à la portion de l'aire délimitée par la courbe précédente située à gauche de l'axe, varie elle aussi avec la température. Nous pouvons la calculer et tracer sa courbe de variation en fonction de θ .

Remarque : Il apparaît une analogie avec la détermination de la fonction de distribution d'une variable aléatoire à partir de sa densité de probabilité, à une différence près : dans un cas, la limite d'intégration se déplace par rapport à la courbe de densité de probabilité, dans l'autre, elle reste fixe et c'est la courbe qui glisse le long de l'axe en même temps qu'elle subit une déformation.

Si la densité de probabilité de chaque paramètre z_i est bornée de part et d'autre de la valeur centrale avec un écart maximal Δz_i, celle de la fonction F_q le sera également aux frontières F_{qmin} et F_{qmax} déterminées par la méthode du cas le plus défavorable.

D'après le théorème de la limite centrale, la courbe résultante est proche d'une courbe de Gauss lorsque le nombre n de paramètres est élevé ; elle est tronquée aux frontières et légèrement modifiée de façon à conserver une surface unitaire (figure IX-2).

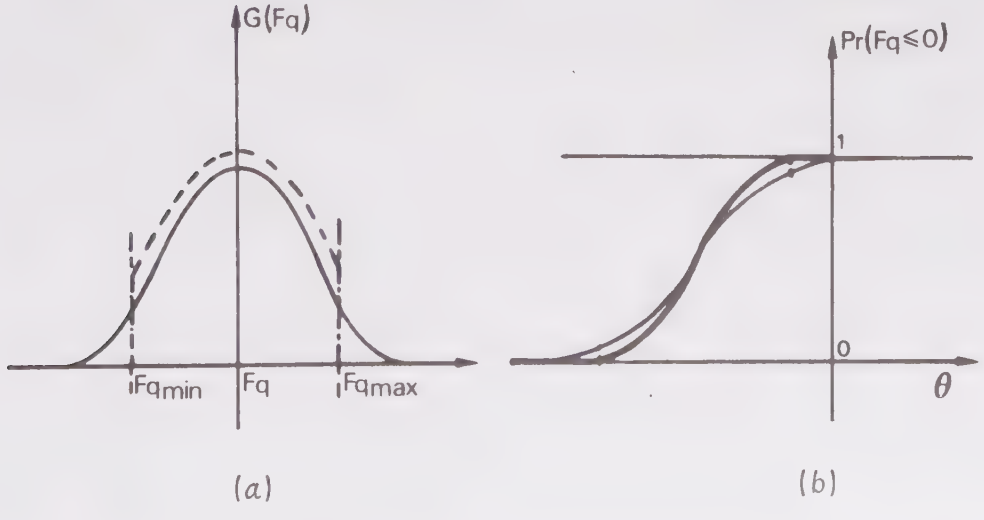


Figure IX-2 Loi de distribution tronquée.

La fonction de distribution correspondante présente donc deux cassures et deux paliers bien définis pour lesquels la probabilité est rigoureusement nulle ou égale à l'unité. C'est le palier supérieur que permettent de déterminer les méthodes de calcul déterministe et que nous avons optimalisé.

La probabilité de fonctionnement du montage peut être déduite de l'ensemble des courbes tracées pour toutes les fonctions F_q.

Lorsque toutes les conditions sont indépendantes, la probabilité globale correspond au produit des probabilités relatives à chacune d'elles prises séparément.

En fait, il existe bien sûr des relations entre certaines fonctions F_q puisqu'elles sont issues d'inéquations établies à partir d'un même schéma de montage. Nous verrons cependant que l'on peut négliger les coefficients de corrélation, même s'ils sont importants, dans la mesure où les courbes affectées par ces derniers n'interviennent pas simultanément.

IX-2 PROBABILITE DE FONCTIONNEMENT DE LA DECADE

Nous avons déterminé les différentes probabilités $Pr(F_q \leqslant 0)$ pour le montage optimalisé, en utilisant la méthode approximative de propagation des erreurs, décrite dans le chapitre IV. Celle-ci repose sur l'application du théorème de la limite centrale au développement limité au premier ordre des fonctions F_q, que l'on peut énoncer de la manière suivante : si une variable aléatoire $\psi(X_1, \ldots, X_n)$ est une fonction de n variables aléatoires X_i indépendantes et de même répartition avec une moyenne m_i et un écart type σ_i, sa loi de distribution, lorsque n est grand, tend asymptotiquement vers une loi normale de moyenne :

$$m = \psi(m_1, \ldots, m_n)$$

et d'écart type

$$\sigma = \left(\sum \delta_i^2 \ \sigma_i^2 \right)^{1/2}$$

δ_i étant la dérivée partielle de ψ par rapport à X_i au point $X = m$.

Cette méthode de calcul, simple à mettre en oeuvre, s'impose d'autant plus ici que la majorité des dérivées partielles des fonctions F_q par rapport aux variables z_i a déjà été déterminée pour les besoins de l'optimalisation préalable.

Nous avons tracé point par point les courbes de probabilité $Pr(F_q \leq 0)$ en fonction de la température pour chacune des conditions de fonctionnement (figure IX-3). Pour cela, nous avons mis au point un programme FORTRAN, complémentaire du programme d'optimalisation, en assimilant les densités de probabilité des paramètres à une loi normale d'écart type égal au tiers de la tolérance maximale sur ces paramètres.

Certaines conditions ne sont plus vérifiées aux basses températures, les autres, aux températures élevées, si bien que la probabilité de fonctionnement du montage décroît lorsqu'on s'éloigne de la température ambiante.

Nous avons tracé sur la figure IX-4 le produit des probabilités partielles. Il représente avec une bonne approximation la probabilité de fonctionnement globale du circuit car les coefficients de corrélation n'ont qu'une influence négligeable. En effet, la limite vers les faibles températures provient essentiellement des conditions 4 et 9, or l'une concerne la polarisation de la diode tunnel principale, l'autre, celle du transistor T_{r_1} de l'amplificateur de remise à zéro (voir chapitre VIII). Il en est de même pour la frontière vers les températures élevées qui résulte des conditions 2 et 7. Quant aux autres conditions, elles n'interviennent pas dans les même domaines de température. Cette approximation peut être vérifiée par comparaison des valeurs numériques des différents coefficients qui entrent en jeu dans les calculs de probabilité.

IX-3 RESULTATS

La courbe de la figure IX-4 représente pratiquement la probabilité de fonctionnement de la décade lorsque tous les paramètres ont une loi de répartition normale.

En fait, le circuit de test est réalisé avec des éléments pour lesquels nous avons mesuré la dispersion effective de leurs paramètres. Dans ces conditions, leur fonction de répartition à l'intérieur des fourchettes introduites dans l'optimalisation, est plus proche d'une distribution uniforme. La probabilité de fonctionnement qui en résulte pour le montage, correspond à la courbe 2 de la figure IX-5 déduite de la courbe 1 calculée par la méthode de propagation des erreurs et tracée en pointillé (cas d'une distribution tronquée).

Même dans ce cas défavorable la probabilité de fonctionnement du circuit est très grande au voisinage immédiat de la plage de température définie par l'optimalisation (θ_{min} = 13,8° C, θ_{max} = 34,2°C) puisqu'elle est supérieure à 0,99 pour des températures comprises entre 5°C et 50°C.

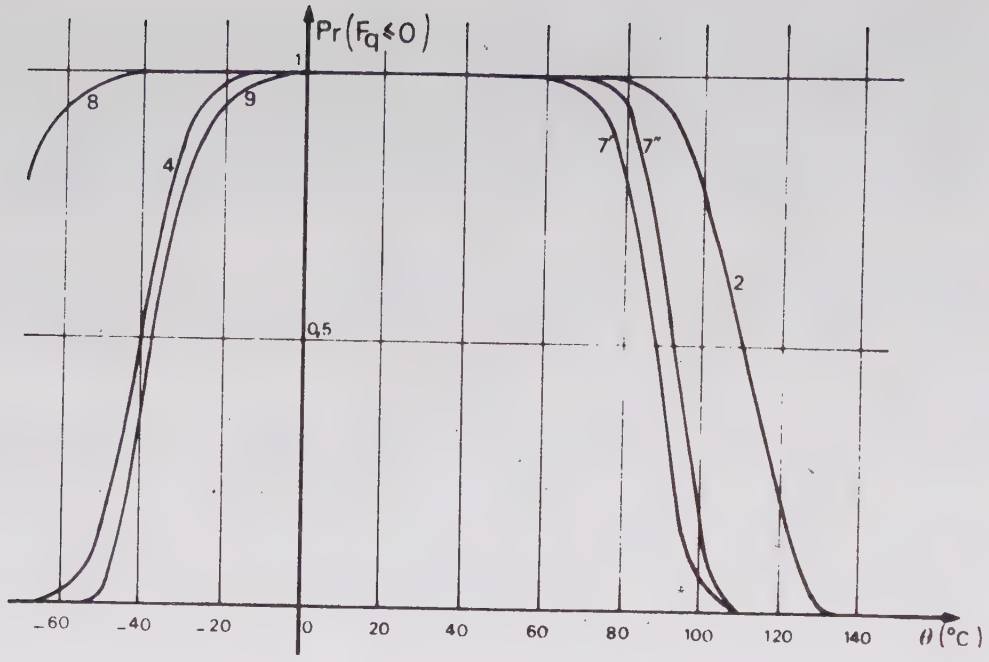


Figure IX-3 Probabilité de chaque condition de fonctionnement.

Figure IX-4 Probabilité de fonctionnement théorique de la décade

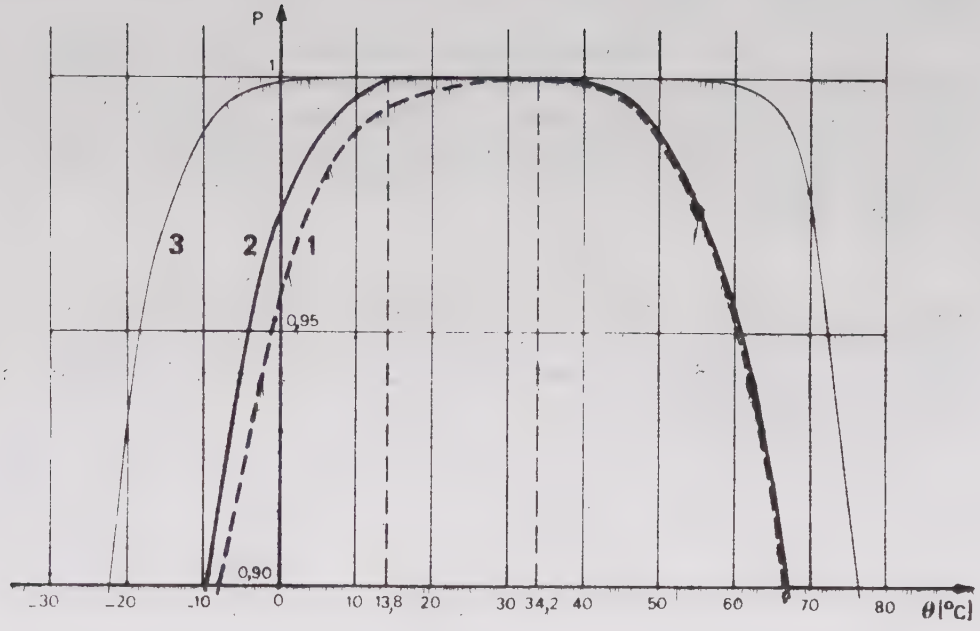


Figure IX-5 Probabilité de fonctionnement du circuit de test

Il faut donc s'attendre à une plage effective plus grande que celle prévue par l'optimalisation pour un montage donné, avec un accroissement supérieur vers les températures élevées, comme l'indique la figure IX-5,

Ce résultat est vérifié pour la décade de test puisque nous avons observé son fonctionnement correct pour des températures comprises entre 10°C et 43°C,

IX-4 CONCLUSION

En définitive, les méthodes déterministes ne sont pas plus pessimistes que les méthodes statistiques dans la mesure où on ne les interprète pas de façon abusive.

Les deux types de calcul, tels que nous les avons abordés, sont en réalité complémentaires ; l'un permet de faire une optimalisation réelle d'un montage en maximisant la plage de température (palier supérieur de la courbe $Pr(F_q \leq 0)$ sur la figure IX-3), l'autre de préciser la valeur probable de sa plage effective.

L'optimalisation que nous proposons et l'étude statistique par la méthode de propagation des erreurs peuvent être traitées simultanément à l'aide d'un même programme puisqu'elles font appel aux mêmes données et nécessitent certains calculs intermédiaires identiques.

C O N C L U S I O N

Dans le cadre de ce mémoire, nous nous sommes proposé d'apporter une contribution à l'étude de la chronométrie rapide par l'intermédiaire du comptage à très faible temps de résolution qui constitue une fonction essentielle dans la mesure d'intervalles de temps effectuée par comparaison directe avec la période d'une horloge. Cette étude nous a conduit à traiter également le problème de l'optimalisation des circuits électroniques pour en accroître la sécurité de fonctionnement.

L'analyse de la structure des compteurs et celle des circuits logiques à diodes tunnel, toutes deux décrites dans le premier chapitre, nous ont permis de concevoir le compteur en anneau à diodes tunnel, résultat de la synthèse ainsi élaborée.

Le compteur que nous proposons permet d'exploiter simultanément les avantages propres à la structure en anneau et ceux offerts par les mémoires synchrones à diode tunnel, quant à leur rapidité intrinsèque de fonctionnement. Une de ses particularités réside dans la nécessité d'adjoindre à chaque étage un circuit de remise à zéro séparé ; cependant si le nombre d'étages de l'anneau est suffisamment grand, la fréquence de comptage peut atteindre plusieurs gigahertz puisqu'elle n'est alors liée qu'au temps de "montée" des diodes tunnel utilisées, comme nous l'avons vu dans le chapitre II.

Conçu à partir d'éléments dont la caractéristique est peu stable d'un composant à l'autre, dans le temps et en température, le compteur ne présente pas une sécurité naturelle de fonctionnement comparable à celle des montages à transistors. Nous nous sommes attachés à montrer qu'il ne s'agit pas d'un défaut rédhibitoire ce qui nous a conduit à aborder l'optimalisation générale des circuits électroniques au cours des chapitres suivants.

L'analyse des données du problème, d'une part et celle des méthodes d'optimalisation couramment utilisées, d'autre part, nous ont incité à élaborer nous-mêmes une méthode de type déterministe basée sur les processus généraux d'optimalisation mais compte tenu des particularités inhérentes aux circuits électroniques. Celle-ci repose sur le principe du cas le plus défavorable et permet d'optimaliser la sécurité de fonctionnement d'un montage logique, tel que l'étage du compteur, par l'intermédiaire de la plage de température correspondant à une sécurité totale en l'absence de défaillance cataleptique des composants. Le critère d'optimalisation choisi ici traduit notre souci de remédier au point faible des circuits à diodes tunnel ; il pourrait être une toute autre grandeur caractéristique de la dispersion sur un élément constitutif.

L'intérêt de ce processus réside dans la transformation du système d'inéquations issues des conditions de fonctionnement en un système d'équations aux limites et dans la résolution de celui-ci grâce à la séparation introduite entre les inconnues principales et les inconnues secondaires du montage. Son utilisation nous a amené à choisir une méthode de résolution d'un système d'équations non-linéaires. Nous avons montré dans le chapitre VI que la méthode de NEWTON généralisée, associée à une résolution d'un système linéaire par triangularisation directe, correspond ici à un compromis entre l'efficacité, la rapidité et la complexité des calculs, tant analytiques que numériques, mis en oeuvre.

La suite de notre travail a consisté en une vérification expérimentale des principales conclusions auxquelles nous sommes arrivés aussi bien dans l'étude du comptage à faible temps de résolution que dans celle de l'optimalisation des circuits.

Les résultats que nous avons obtenus avec une décade de test sont tout à fait conformes à ceux que nous escomptions ; le temps de résolution de ce montage équipé de sondes oscilloscopiques est inférieur à 1 ns, la fréquence maximale de comptage n'est pratiquement limitée que par le temps de réponse des circuits de remise à zéro, quant à la plage de température mesurée, elle est supérieure à celle prévue par l'optimalisation ce qui est logique car, bien qu'elle soit inférieure à l'unité, la probabilité de fonctionnement n'est pas nulle en dehors de la plage théorique.

Nous avons calculé la probabilité de fonctionnement du montage optimalisé pour différentes températures. Cette étude statistique faite de façon approchée grâce à la méthode de propagation des erreurs nous montre qu'elle n'est pas négligeable en dehors de la plage prévue par l'optimalisation puisqu'elle est supérieure à 0,99 pour une plage d'étendue double.

La méthode de type déterministe n'est pas plus pessimiste qu'une méthode statistique si on ne l'interprète pas de façon abusive ; toutes deux sont en réalité complémentaires :

l'une permet de faire une optimalisation réelle d'un montage en prenant comme critère la plage de température correspondant à une sécurité de fonctionnement totale, l'autre permet de préciser la valeur probable de la plage effective pour le montage optimalisé.

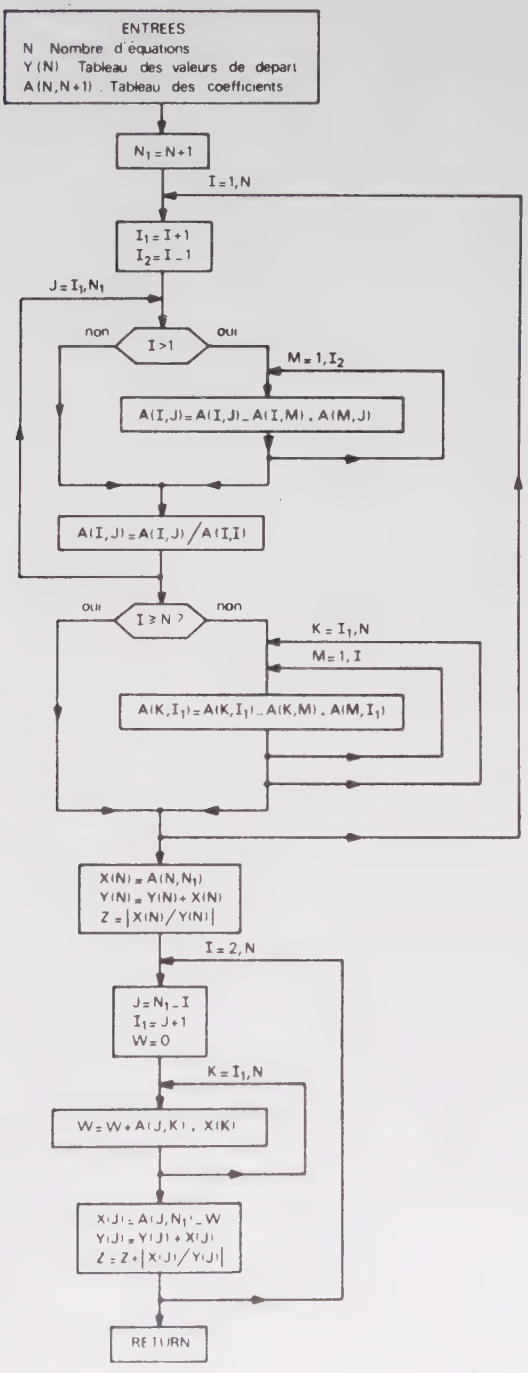
Nous avons montré qu'il est d'ores et déjà possible de réaliser une décade à diodes tunnel ayant une fréquence maximale de comptage supérieure à 1 GHz ; cette limite pouvant même atteindre plusieurs gigahertz si l'on augmente le nombre d'étages de l'anneau. Une telle décade avec des circuits de remise à zéro intrinsèquement plus rapides et une sécurité de fonctionnement répondant aux normes industrielles est actuellement en cours d'étude au laboratoire. Il sera dès lors possible d'entreprendre la réalisation, à partir de ce dernier compteur, d'un chronomètre qui présentera un temps de résolution sensiblement inférieur à 1 ns, performance d'autant plus intéressante que, de par son principe, l'appareil permettra de mesurer des intervalles de temps longs avec une précision relative voisine de celle de l'horloge utilisée et que l'on pourra lui associer un dispositif vernier à diodes tunnel de résolution 50 ps, déjà étudié au laboratoire.

ANNEXE I

SOUS-PROGRAMME EQUA

Organigramme de résolution d'un système linéaire adaptée à la méthode de Newton généralisée.

Y(j) = Inconnues du système non-linéaire.
X(j) = Inconnues du système linéarisé.
Z(j) = Variablesde précision.

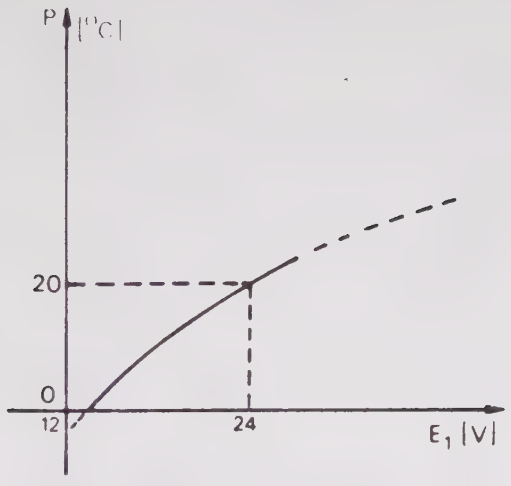


ANNEXE II

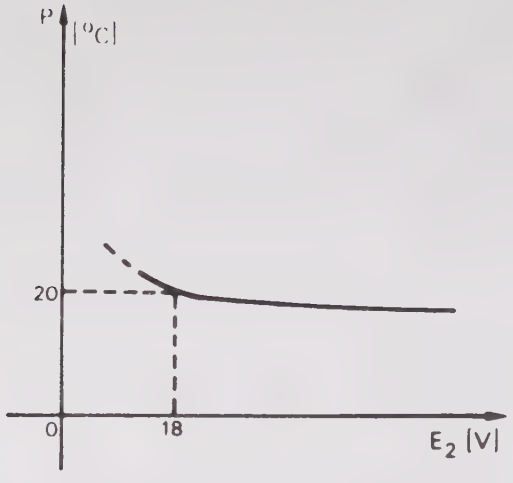
OPTIMALISATION DE LA DECADE A DIODES TUNNEL

Variations de la plage de température en fonction des différents paramètres du montage.

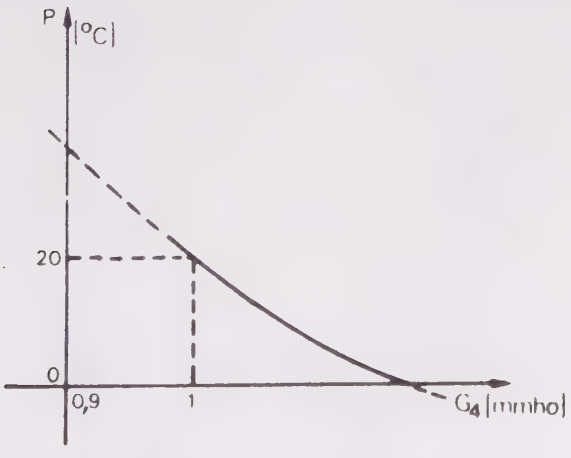
$$P = 2.\Delta\theta \text{ (en degrés Celsius).}$$



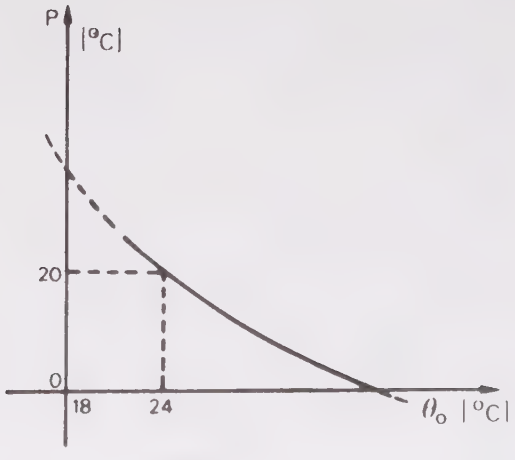
Pente : 1,5 C/V



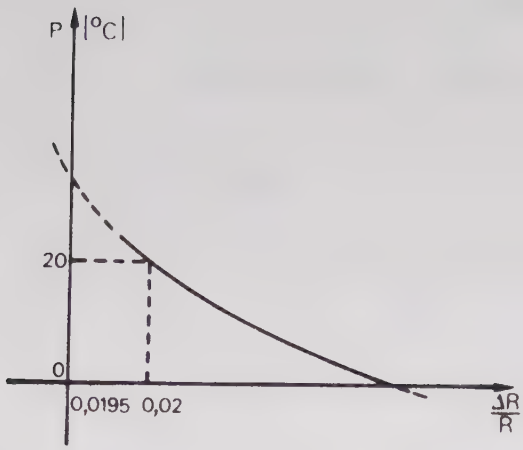
Pente : 0,2 C/V



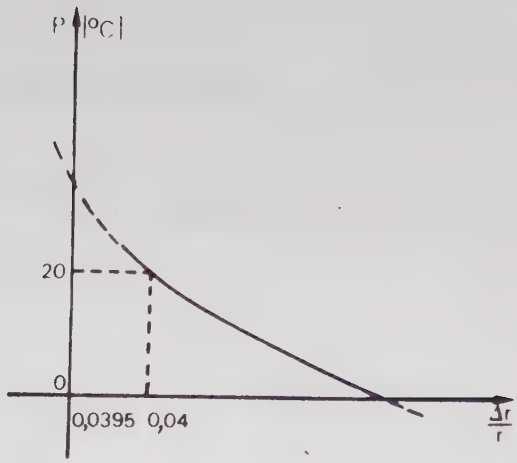
Pente : 27 C/mmho



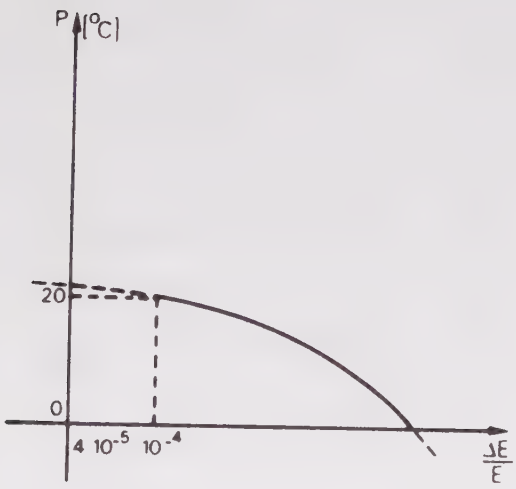
Pente : 1,4 C/

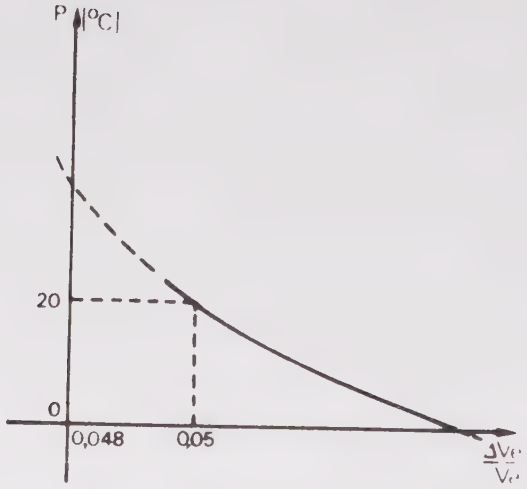


Pente : 130 C/0,01

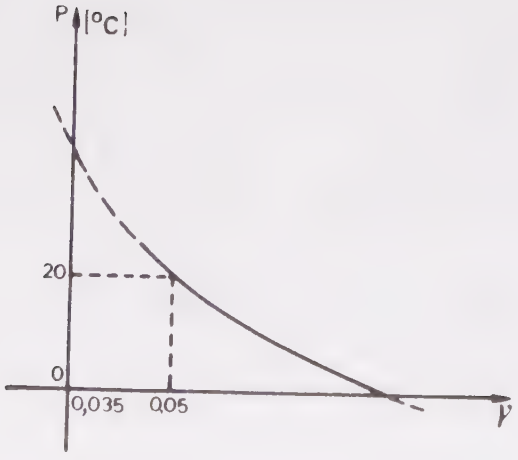


Pente : 130 C/0,01

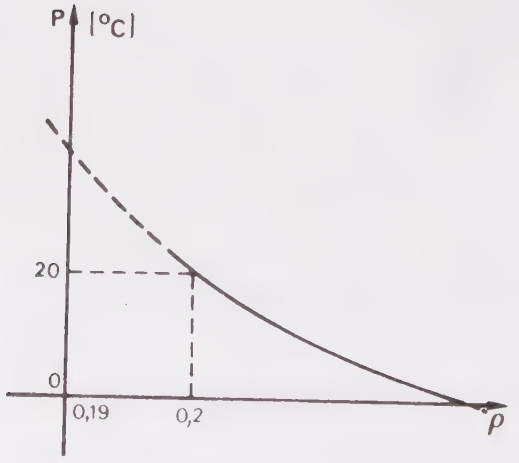




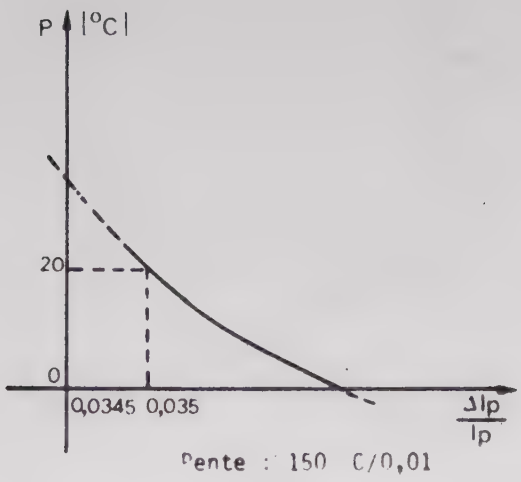
Pente : 50 C/0,01



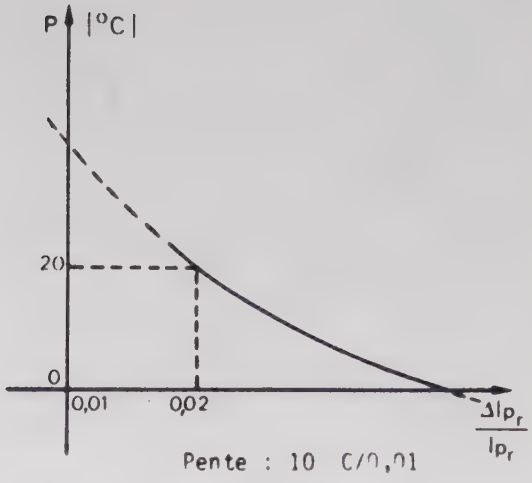
Pente : 6 C/0,01



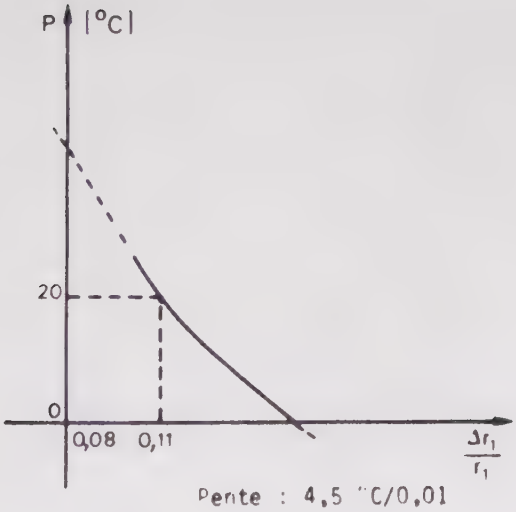
Pente : 10 C/0,01



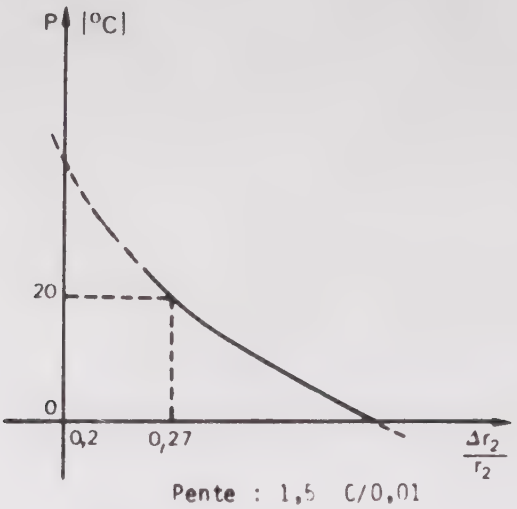
Pente : 150 C/0,01



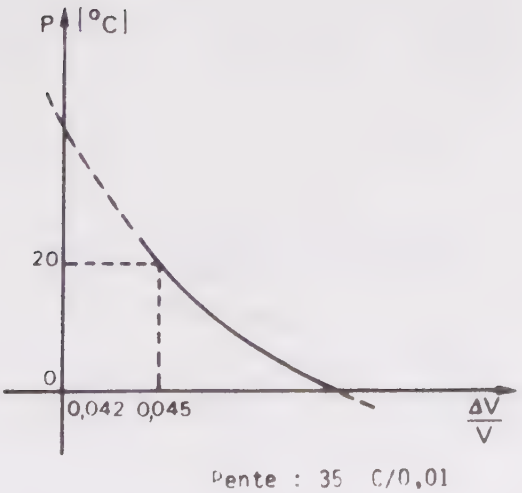
Pente : 10 C/0,01



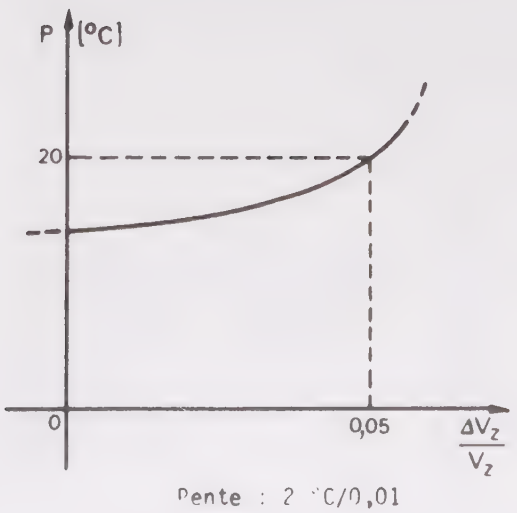
Pente : 4,5 °C/0,01



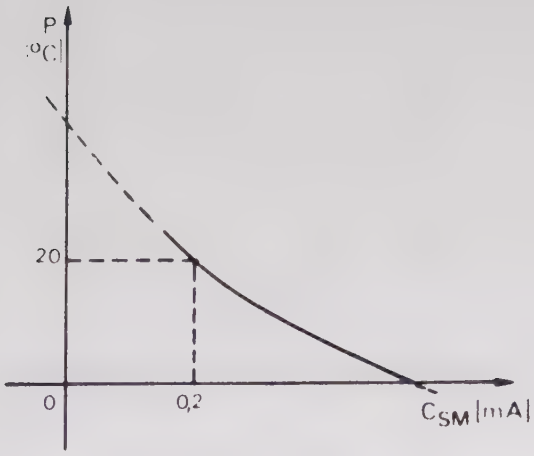
Pente : 1,5 C/0,01



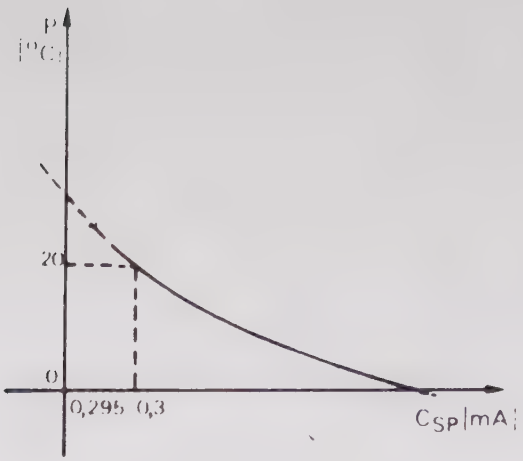
Pente : 35 C/0,01



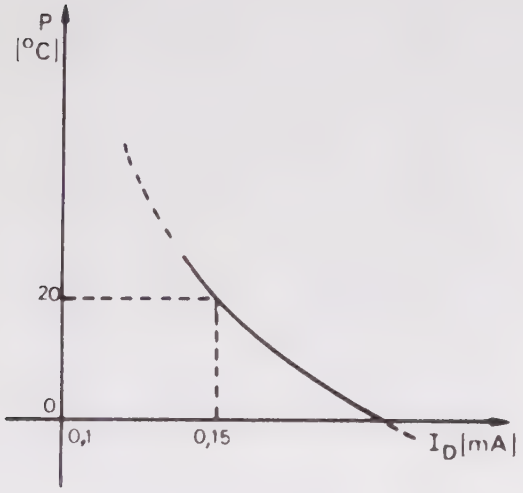
Pente : 2 °C/0,01



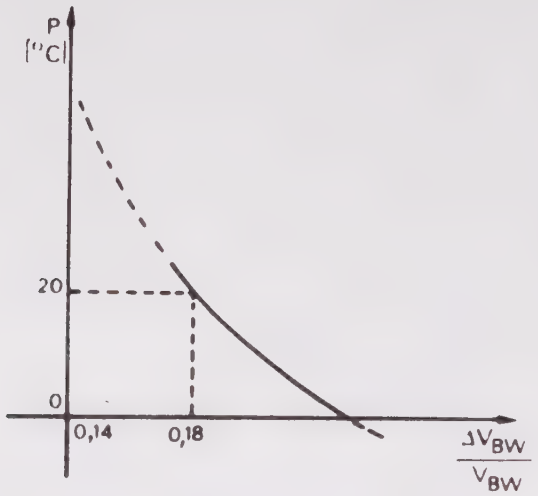
Pente : 1000 °C/mA



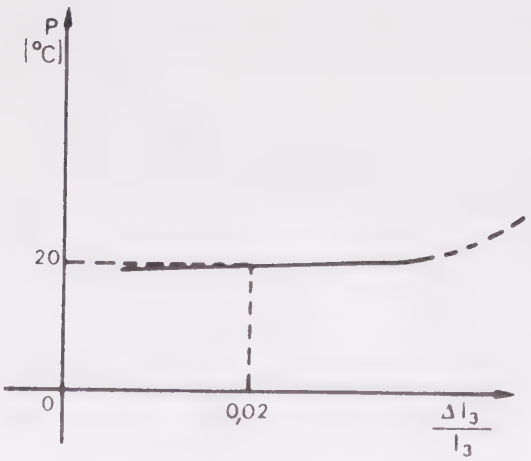
Pente : 400 °C/mA



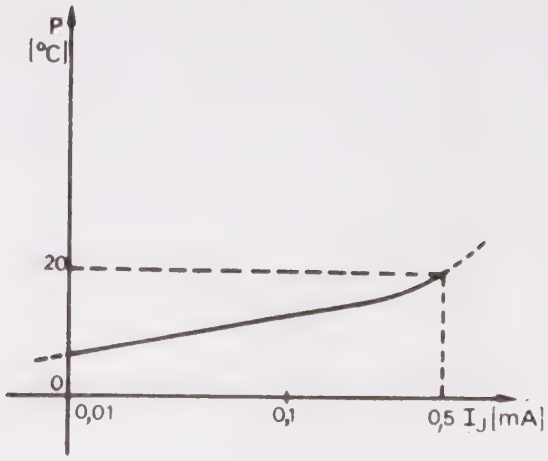
Pente : 330 °C/mA

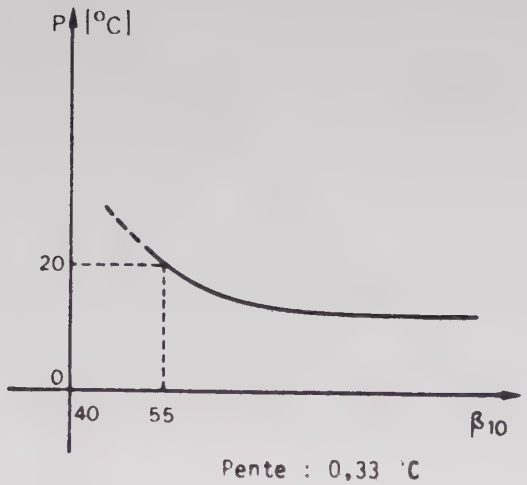


Pente : 4 °C/0,01

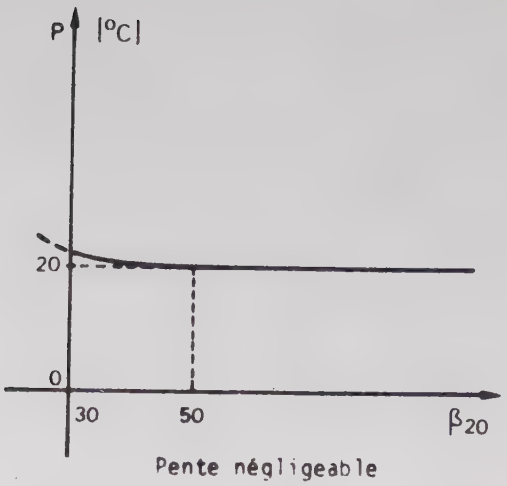


Pente : 13 °C/0,01

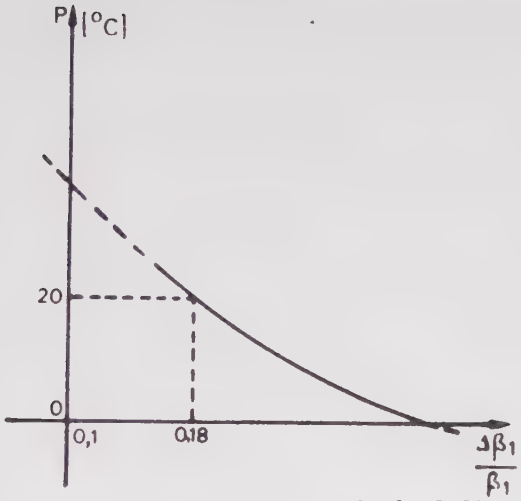




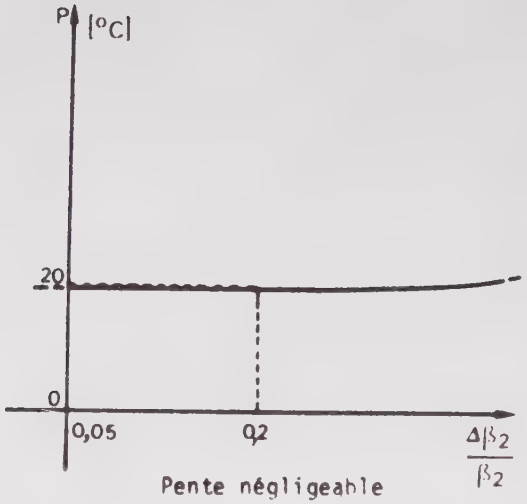
Pente : 0,33 °C



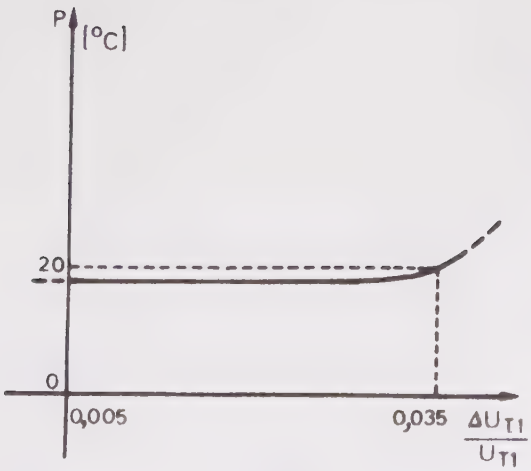
Pente négligeable



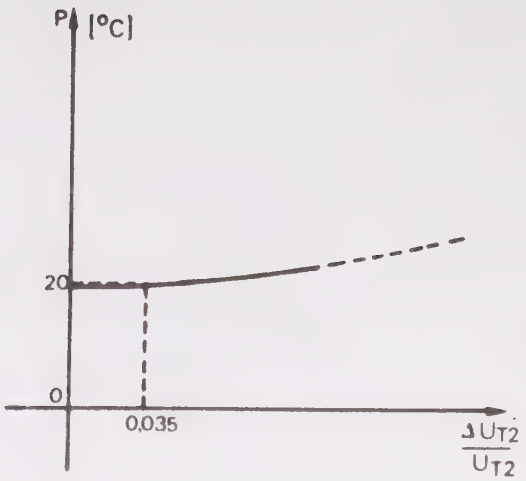
Pente : 1,25 °C/0,01



Pente négligeable



Pente : 5 °C/0,01



Pente : 0,33 °C/0,01

Vu et Approuvé

Talence, le 15 novembre 1973

P. Le Président de l'Université
de BORDEAUX I
Le Vice-Président,